

فصل ۱  
دایره

۷	درس ۱: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره
۲۰	درس ۲: رابطه‌های طولی در دایره
۲۷	درس ۳: اوضاع نسبی دو دایره و مماس‌های مشترک
۳۸	درس ۴: چندضلعی‌های محاطی و محیطی
۵۱	پاسخ تشریحی

فصل ۲  
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۸۵	درس ۱: تبدیل
۸۷	درس ۲: بازتاب
۹۴	درس ۳: انتقال و دوران
۱۰۴	درس ۴: تجانس و همانی
۱۱۲	پاسخ تشریحی

فصل ۳  
روابط طولی در مثلث

۱۳۲	درس ۱: قضیه سینوس‌ها
۱۳۸	درس ۲: قضیه کسینوس‌ها
۱۴۷	درس ۳: نیمسازها
۱۵۳	درس ۴: مساحت و طول ارتفاع
۱۶۲	پاسخ تشریحی

# دایره

(فصل ۱)

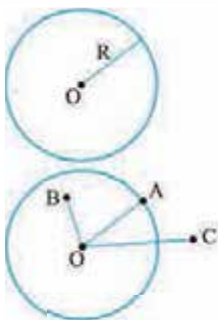
درس ۱

## مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره



در سال‌های قبل با دایره آشنا شدیم و فهمیدیم که فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر شعاع است. یک دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  را با نماد  $C(O, R)$  نشان می‌دهیم.

حالا یک دایره به شعاع  $6$  و مرکز  $O$  را در نظر بگیرید، هر نقطه‌ای را که در صفحه در نظر بگیرید، نسبت به دایره ۳ حالت می‌تواند داشته باشد:



۱ اگر فاصله این نقطه از مرکز دایره  $6$  باشد، این نقطه روی دایره قرار دارد.

۲ اگر فاصله این نقطه از مرکز دایره بیشتر از  $6$  باشد، بدیهی است که بیرون دایره می‌افتد.

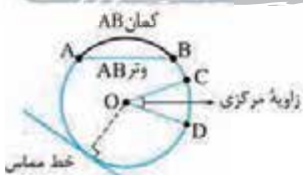
۳ اگر هم فاصله این نقطه از مرکز دایره کمتر از  $6$  باشد، درون دایره می‌افتد.

**مثال** اگر فاصله نقطه‌ای از مرکز دایره‌ای به شعاع  $6$  برابر با  $3m - 1$  باشد، محدوده  $m$  را طوری تعیین کنید که این نقطه درون دایره باشد.

$$3m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

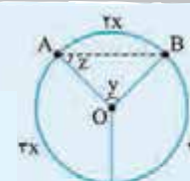
**پاسخ** اولاً که این فاصله باید عددی مثبت باشد پس:  $3m - 1 < 6 \Rightarrow 3m < 7 \Rightarrow m < \frac{7}{3}$  و از طرفی برای این که این نقطه درون دایره بیفتد باید فاصله‌اش از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد:

$$\frac{1}{3} < m < \frac{7}{3}$$



تعریف کمان، وتر، زاویه مرکزی و خط مماس بر دایره را که می‌دانید و یادتان هست که کل دایره  $360^\circ$  است. و راستی یادتان هست که دو تا کمان  $AB$  داریم یکی کمان کوچک‌تره و یکی هم کمان بزرگ‌تره! یک چیز دیگر را هم یادآوری کنم و برویم سراغ هندسه سال یازدهم، زاویه مرکزی، با کمان مقابلش برابر است یعنی  $\widehat{CD} = \hat{O}$ .

**تست** در شکل مقابل، حاصل  $x + y + z$  کدام است؟



$245^\circ$  (۴)

$270^\circ$  (۳)

$225^\circ$  (۲)

$180^\circ$  (۱)

مجموع کمان‌های دایره  $360^\circ$  است، پس  $x$  به دست می‌آید:

$$3x + 3x + 2x = 360^\circ \Rightarrow 8x = 360^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

پس کمان  $AB$  که  $2x$  است می‌شود:  $\widehat{AB} = 90^\circ$  و زاویه مرکزی مقابلش هم باید  $90^\circ$  شود پس  $y = 90^\circ$ . حالا باید  $z$  را پیدا کنیم، اول از هر چیزی باید حواسمان باشد که  $OA$  و  $OB$  شعاع‌های دایره هستند پس  $OA$  و  $OB$  برابرند، یعنی مثلث  $AOB$  متساوی‌الساقین است و در نتیجه داریم:

$$\triangle AOB: \hat{O} = 90^\circ \Rightarrow 2z = 90^\circ \Rightarrow z = 45^\circ$$

$$x + y + z = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

پس  $x + y + z$  می‌شود:



**مثال** ثابت کنید اگر دو کمان از دایره‌ای با هم برابر باشند، وترهای متناظر آن‌ها نیز با هم برابرند.

**پاسخ** مطابق شکل فرض می‌کنیم که کمان‌های  $AB$  و  $CD$  برابر باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم که وترهای  $AB$  و  $CD$  با هم برابرند:

کمان‌های  $AB$  و  $CD$  برابرند، پس زاویه‌های مرکزی روبه‌روی آن‌ها نیز با هم برابرند.

یعنی:  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ، حالا چون  $OA$  و  $OB$  و  $OC$  و  $OD$  همگی شعاع‌اند می‌توانیم درباره مثلث‌های  $OAB$  و  $OCD$  بگوییم:

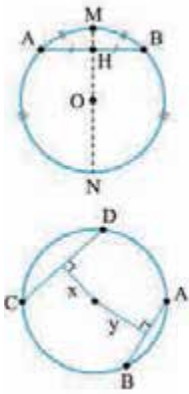
$$\begin{cases} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$

گفت‌وگو

۱ اگر از مرکز دایره عمودی بر یک وتر رسم کنیم، وتر را که نصف می‌کند هیچ، کمان‌های متناظر این وتر را هم نصف می‌کند. شکل هم می‌گوید که از  $O$  عمودی بر  $AB$  رسم کردیم که هم وتر  $AB$  ( $AH = HB$ ) و هم کمان کوچک‌تر  $AB$  ( $AM = MB$ ) و همین‌طور کمان بزرگ‌تر  $AB$  ( $AN = NB$ ) را نصف کرده است. (چرا؟) از طرفی  $AB$  کوتاه‌ترین وتر گذرنده از  $H$  درون دایره است.

۲ هر چه قدر که یک وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، طولش بزرگ‌تر می‌شود. مثلاً در شکل مقابل چون  $CD$  به مرکز دایره نزدیک‌تر از  $AB$  است، می‌فهمیم که  $CD > AB$  و شاید بعضی‌ها بگویند چون بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۳ اگر دو وتر دایره برابر باشند، فاصله آن‌ها از مرکز دایره برابر است.



**مثال** در شکل مقابل مرکز هر دو دایره نقطه  $O$  است، ثابت کنید:  $AB = CD$ .

**پاسخ** از  $O$  عمودی بر وتر  $AD$  رسم می‌کنیم، در دایره کوچک‌تر داریم:

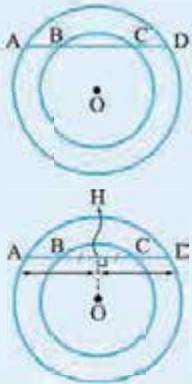
$$OH \perp BC \Rightarrow BH = HC$$

$$OH \perp AD \Rightarrow AH = HD$$

$$AH - BH = DH - CH \Rightarrow AB = CD$$

و در دایره بزرگ‌تر نیز داریم:

حالا می‌توانیم بگوییم که:



**تست** در شکل روبه‌رو،  $O$  مرکز دایره است. اگر  $AB = 8$  و  $CD = 6$  و  $OH = 10 - m$  و  $OK = 3m - 2$

محدوده  $m$  کدام است؟

$$m < 3 \quad (2)$$

$$m > 3 \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} < m < 10 \quad (4)$$

$$3 < m < 10 \quad (3)$$

چون  $AB$  از  $CD$  بزرگ‌تر است پس  $OH$  از  $OK$  کوچک‌تر است، یعنی وتر  $AB$  نزدیک‌تر بوده که بزرگ‌تر شده!

$$OK > OH \Rightarrow 3m - 2 > 10 - m \Rightarrow 4m > 12 \Rightarrow m > 3$$

پس داریم:

$$\begin{cases} 10 - m > 0 \Rightarrow m < 10 \\ 3m - 2 > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

از طرفی طول هر پاره‌خط باید عددی مثبت باشد. در نتیجه:

$$3 < m < 10 \text{ داریم.}$$

اوضاع نسبی خط و دایره

یک خط و دایره سه‌تا حالت می‌توانند داشته باشند:

۱ **مقاطع:** اگر خط دایره را قطع کند به این خط قاطع می‌گویند و در این حالت به خط و دایره متقاطع می‌گویند.

$$OH < R$$

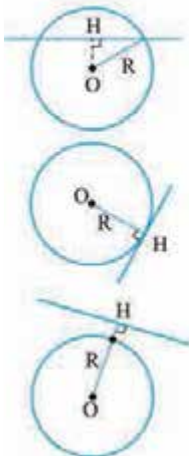
۲ **مماس:** اگر خط و دایره، یک نقطه مشترک داشته باشند، خط و دایره مماس هستند.

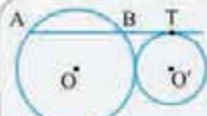
$$OH = R$$

اگر از مرکز دایره به نقطه مشترک شعاع بکشیم، این شعاع بر خط مماس عمود می‌شود.

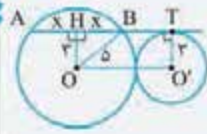
$$OH > R$$

۳ **متخارج:** گاهی خط و دایره کاری با هم ندارند و خط از بیرون دایره عبور می‌کند.





**مثال** دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ مطابق شکل مماس خارج‌اند و امتداد وتر  $AB$  در  $T$  بر دایره کوچک‌تر مماس است. محیط مثلث  $OAB$  را بیابید.



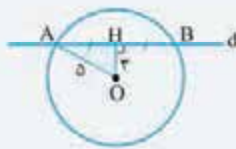
**پاسخ**  $O'T$  بر  $AT$  عمود است. از  $O$  نیز بر  $AB$  عمود می‌کنیم. (قطر عمود بر وتر) می‌دانیم  $O'H = 3$  و داریم:

$$\Delta OHT: OB^2 = OH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow 25 = 9 + \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = 8$$

$$P_{\Delta OAB} = 5 + 5 + 8 = 18$$

**تست** خطی به فاصله ۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ عبور می‌کند. طول پاره خطی که دایره از این خط جدا می‌کند، کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۸ (۲)
- $2\sqrt{34}$  (۳)
- $\sqrt{34}$  (۴)



**پاسخ** گزینه ۳ فاصله نقطه از خط یعنی عمودی که از آن نقطه بر خط رسم می‌شود پس مطابق شکل  $OH = 3$  است و از طرفی این خط عمود، وتر  $AB$  را نصف می‌کند.

می‌خواهیم طول  $AB$  را حساب کنیم، برای این کار از  $O$  به  $A$  وصل می‌کنیم،  $OA = 5$  حالا در مثلث قائم‌الزاویه  $AOH$  قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$\Delta AOH: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AO^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

پس  $AB$  دو برابر  $AH$  یعنی  $2 \times 4 = 8$  می‌شود.

**انواع زاویه‌ها در دایره**

در دایره ۵ مدل زاویه داریم که در جدول زیر آن‌ها را می‌بینید.

حالت خاص مهم	اندازه	قیافه	اسم
<p>قطر دایره را به دو نیم دایره تقسیم می‌کند.</p> <p><math>\hat{AOB} = 180^\circ</math></p>	$\hat{AOB} = \widehat{AB}$		زاویه مرکزی
<p>زاویه محاطی روبه‌رو به قطر، <math>90^\circ</math> است.</p> <p><math>\hat{M} = 90^\circ</math></p>	$\hat{BMC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$		زاویه محاطی
<p>شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.</p>	$x\hat{AB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$		زاویه ظلی
-	$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$		زاویه وتری داخلی

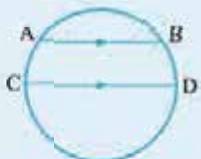


اسم	قیافه	اندازه	حالت خاص مهم
زاویه وتری خارجی		$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$	۱- حالت خاص $\hat{M} = \frac{\widehat{x} - \widehat{y}}{2}$
			۲- حالت خاص $\hat{M} = \frac{\widehat{x} - \widehat{y}}{2}$

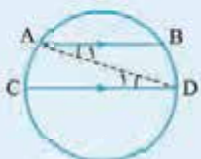


$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \dots = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

همه زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم برابرند.

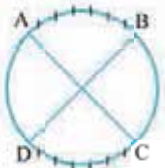


**مثال** در شکل مقابل، وترهای AB و CD موازی‌اند، ثابت کنید:  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

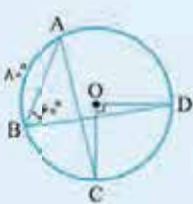


**پاسخ** از A به D وصل می‌کنیم، مطابق شکل زاویه‌های  $\hat{A}_1$  و  $\hat{D}_1$  با هم برابرند، از طرفی این زاویه‌ها محاطی‌اند، پس می‌توانیم بگوییم که:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$



**تذکره** اگر  $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ ، الزاماً AB و CD موازی نیستند، نگاه کنید:



**تست** در شکل مقابل،  $\widehat{AB} = 80^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$  است. اندازه  $\hat{A}$  کدام است؟

۳۰° (۲)

۲۵° (۱)

۲۰° (۴)

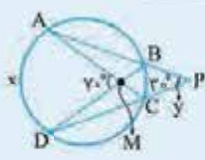
۳۵° (۳)

**پاسخ گزینه ۳** وقتی که زاویه مرکزی O برابر ۹۰° باشد، کمان CD هم ۹۰° خواهد بود،  $\hat{B}$  زاویه محاطی است پس کمان مقابلش باید دو برابر این زاویه باشد پس  $\widehat{AD} = 120^\circ$ . حالا تکلیف همه کمان‌ها به جز  $\widehat{BC}$  مشخص است.

$$\widehat{BC} = 360 - (80 + 120 + 90) = 70^\circ$$

کل دایره ۳۶۰° است پس داریم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ پس: } BC \text{ کمان همین کمان } BC \text{ است و روبه‌رو به همین کمان } BC \text{ است، پس:}$$



**تست** در شکل مقابل، y کدام است؟

۶۰° (۴)

۴۰° (۳)

۳۰° (۲)

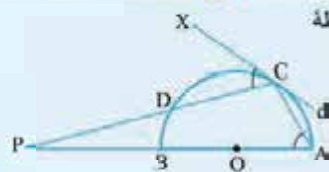
۲۰° (۱)

**پاسخ گزینه ۳** زاویه M وتری داخلی است، پس داریم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{x + 30^\circ}{2} \Rightarrow x + 30^\circ = 140^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$$

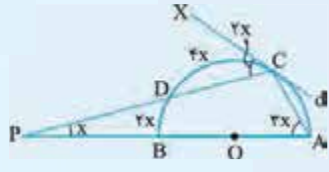
$$\hat{P} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow y = \frac{110^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

زاویه P وتری خارجی است، پس داریم:



**تست** در شکل مقابل، امتداد قطر  $AB$  و وتر  $DC$  یکدیگر را در نقطه  $P$  قطع می‌کنند و خط  $d$  در نقطه  $C$  بر دایره مماس است. اگر  $\widehat{XCD} = 2x$  و  $\widehat{P} = x$  و  $\widehat{A} = 3x$  باشد، کمان  $AC$  چند درجه است؟

- (۱)  $8^\circ$   
 (۲)  $9^\circ$   
 (۳)  $12^\circ$   
 (۴)  $72^\circ$



**پاسخ** گزینه ۳: زاویه  $\widehat{XCD}$  ظلی است پس وقتی این زاویه  $2x$  باشد کمان مقابلش یعنی  $CD = 4x$  باید دو برابر آن باشد، پس:  $\widehat{CD} = 4x$ .

زاویه  $A$  محاطی است پس  $\widehat{BC} = 2\widehat{A} = 6x$  پس کمان  $BD$  برابر با  $2x$  است. حالا سراغ آخرین اطلاعات مسئله برویم، زاویه  $P$  وتری خارجی است، پس داریم:

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{AC} - 2x}{2} \Rightarrow 2x = \widehat{AC} - 2x \Rightarrow \widehat{AC} = 4x$$

خب سؤال که الکی نگفته قطر  $AB$ ، حتماً به یک دردی می‌خورد! قطر  $AB$  است پس با یک نیم‌دایره روبه‌روایم، یعنی مجموع کمان‌ها نصف یک دایره کامل یعنی  $180^\circ$  است:

$$\widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AC} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 4x + 4x = 180^\circ \Rightarrow 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 4x = 4(18^\circ) = 72^\circ$$

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- دایره  $(O, 5)$  و نقاط  $A, B, C$  مفروض هستند. اگر  $OA = 5$  و  $OB = 3$  و  $OC = 7$  باشند کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

- (۱) نقطه  $A$  روی دایره است.  
 (۲) نقطه  $B$  درون دایره و نقطه  $C$  بیرون دایره است.  
 (۳) فاصله نقاط  $B$  و  $C$  بیشتر از شعاع دایره است.  
 (۴) فاصله نقاط  $A$  و  $B$  حداکثر ۸ واحد است.

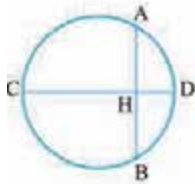
۲- نقطه ثابت  $A$  در صفحه مفروض است. تمام نقاطی که فاصله آن‌ها از  $A$  کم‌تر از ۳ سانتی‌متر باشد چه مساحتی از صفحه را پوشش می‌دهند؟

- (۱)  $3\pi$   
 (۲)  $9\pi$   
 (۳)  $\frac{3\pi}{2}$   
 (۴)  $\frac{9\pi}{2}$

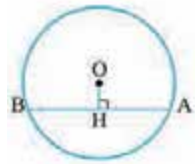
۳- نقطه  $A$  به فاصله  $5 - 2x$  از نقطه  $O$  قرار دارد. اگر نقطه  $A$  درون دایره به شعاع ۵ و مرکز  $O$  و بیرون دایره به شعاع ۳ و مرکز  $O$  قرار داشته باشد، محدوده  $x$  کدام است؟

- (۱)  $4 < x < 5$   
 (۲)  $8 < x < 10$   
 (۳)  $x > 5$   
 (۴)  $x > 10$

۴- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



- (۱) اگر قطر دایره باشد نقاط  $H$  و  $D$  به ترتیب وسط وتر و کمان  $AB$  هستند.  
 (۲) اگر نقاط  $H$  و  $D$  روی عمود منصف وتر  $AB$  باشند، قطر دایره است.  
 (۳) اگر  $D$  وسط کمان  $AB$  و  $H$  وسط وتر  $AB$  باشند، قطر دایره است.  
 (۴) اگر قطر دایره  $CD$  و  $D$  وسط کمان  $AB$  باشد، قطر  $CD$  عمود منصف وتر  $AB$  است.



۵- در شکل مقابل  $AB = 6$ ،  $OH = 1$  و  $\widehat{OHA} = 90^\circ$ . شعاع دایره چه قدر است؟

- (۱)  $\sqrt{13}$   
 (۲)  $\sqrt{12}$   
 (۳)  $\sqrt{11}$   
 (۴)  $\sqrt{10}$

۶- در دایره  $(O, 5)$  فاصله وتر  $AB$  از مرکز دایره برابر ۳ است. طول وتر  $AB$  کدام است؟

- (۱) ۴  
 (۲) ۸  
 (۳) ۳  
 (۴) ۶

۷- در دایره‌ای به شعاع  $2m$ ، وتر  $AB = 4m - 8$  به فاصله  $m + 3$  از مرکز دایره قرار دارد.  $m$  کدام است؟

- (۱) ۵  
 (۲) ۶  
 (۳)  $2\sqrt{2}$   
 (۴)  $3\sqrt{2}$

۸- در دایره‌ای به شعاع  $3\sqrt{2}$  اگر فاصله نقطه  $A$  از مرکز دایره ۴ باشد، اندازه کوچک‌ترین وتر گذرنده از  $A$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$   
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

۹- در دایره‌ای به قطر  $10$ ، وتر  $AB$  به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطه  $C$  بر روی دایره متحرک است. بیشترین مساحت مثلث  $CAB$  کدام است؟

- (۱) ۳۲  
 (۲) ۳۶  
 (۳) ۴۰  
 (۴) ۴۸

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر در یک دایره فاصله دو وتر از مرکز دایره برابر باشد طول این دو وتر یکسان است.  
 (۲) بزرگ‌ترین وتری که از نقطه A درون دایره می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از نقطه A عمود است.  
 (۳) از بین دو وتر در یک دایره، وتری بزرگ‌تر است که به مرکز دایره نزدیک‌تر است.  
 (۴) تمام وترهایی از دایره که طول یکسانی دارند، فاصله وسطشان از مرکز دایره با هم برابر است.
- ۱۱- در دایره  $C(O, r)$  طول وترهای AB و CD به ترتیب ۱۰ و ۱۲ است. اگر فاصله O از وترهای AB و CD به ترتیب  $2x+6$  و  $3-5x$  باشد، حدود x کدام است؟

- (۱)  $x < 3$       (۲)  $x > 3$       (۳)  $0 < x < 3$       (۴)  $\frac{3}{5} < x < 3$

۱۲- در شکل زیر، شعاع دایره‌ها برابر ۵ است. مطابق شکل، اگر  $AD \parallel OO'$  باشد، اندازه CD کدام است؟



- (۱) ۵      (۲) ۵/۵      (۳) ۶      (۴)  $4\sqrt{2}$

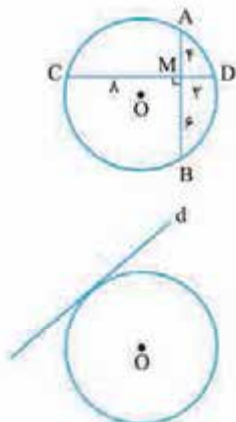
۱۳- خط  $\Delta$  دایره‌ای به شعاع  $2\sqrt{3}$  را قطع می‌کند. اگر زاویه خط مماس بر دایره با خط  $\Delta$  در نقطه تلاقی برابر با  $30^\circ$  درجه باشد، فاصله مرکز دایره تا  $\Delta$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$       (۲) ۲      (۳) ۳      (۴)  $\sqrt{3}$

۱۴- وسط تمام وترهایی به طول ۱۶ واحد در دایره‌ای به شعاع  $10$  واحد، روی کدام شکل هستند؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع ۸      (۲) دایره‌ای به شعاع ۶  
 (۳) قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۶      (۴) قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۸

۱۵- در شکل مقابل دو وتر AB و CD برهم عمودند. اندازه شعاع دایره چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       (۲)  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$       (۳)  $5\sqrt{5}$       (۴)  $3\sqrt{3}$

۱۶- خط d بر دایره  $C(O, 5)$  مماس است. اگر فاصله O از خط d برابر  $3-2x$  باشد x کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

۱۷- خط d به فاصله  $1-3x$  از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ قرار دارد. اگر  $x > 2$  باشد کدام گزینه درست است؟

- (۱) ممکن است خط d بر دایره مماس شود.      (۲) ممکن است خط d و دایره متقاطع باشند.  
 (۳) خط d و دایره نقطه مشترکی ندارند.      (۴) اگر  $x < 5$  باشد، خط d دایره را قطع می‌کند.

۱۸- خط d مفروض است. مرکز همه دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند روی چه شکلی قرار دارند؟

- (۱) خطی موازی خط d و به فاصله R از آن      (۲) دو خط موازی خط d و به فاصله R از آن  
 (۳) خطی عمود بر خط d      (۴) دو نقطه به فاصله R از خط d

۱۹- خط d مفروض است. مرکز همه دایره‌هایی که در نقطه ثابت A روی خط d بر آن مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟

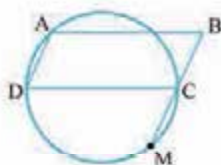
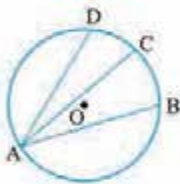
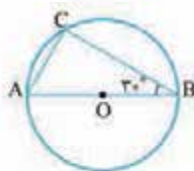
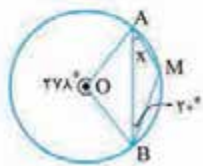
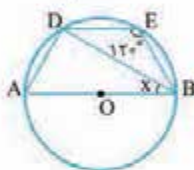
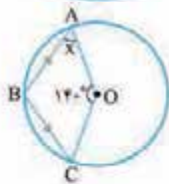
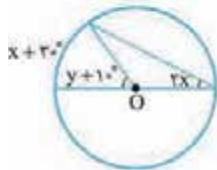
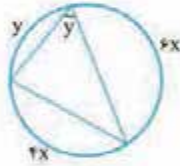
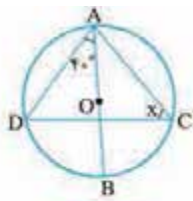
- (۱) یک خط عمود بر خط d      (۲) دو خط عمود بر هم که نقطه تلاقی آن‌ها A است.  
 (۳) دو خط موازی خط d      (۴) یک خط موازی خط d

۲۰- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطه A مماس درونی هستند. وتر BC از دایره بزرگ، موازی خط‌المرکزین و بر دایره کوچک در

(ریاضی ۹۷)

نقطه P مماس است. اندازه  $PB \times PC$  کدام است؟

- (۱) ۲۴      (۲) ۳۲      (۳) ۳۶      (۴) ۴۸



۲۱- در شکل مقابل مقدار  $x$  چه قدر است؟

- (۱)  $5^\circ$   
 (۲)  $6^\circ$   
 (۳)  $7^\circ$   
 (۴)  $8^\circ$

۲۲- در شکل مقابل  $x + y$  کدام است؟

- (۱)  $5^\circ$   
 (۲)  $10^\circ$   
 (۳)  $8^\circ$   
 (۴)  $9^\circ$

۲۳- در شکل مقابل  $O$  مرکز دایره است. مقدار  $x + y$  چه قدر است؟

- (۱)  $1^\circ$   
 (۲)  $2^\circ$   
 (۳)  $3^\circ$   
 (۴)  $4^\circ$

۲۴- در شکل مقابل مقدار  $x$  چه قدر است؟

- (۱)  $4^\circ$   
 (۲)  $45^\circ$   
 (۳)  $5^\circ$   
 (۴)  $55^\circ$

۲۵- در شکل مقابل  $O$  مرکز دایره است. مقدار  $x$  چه قدر است؟

- (۱)  $25^\circ$   
 (۲)  $4^\circ$   
 (۳)  $3^\circ$   
 (۴)  $5^\circ$

۲۶- با توجه به شکل، اندازه زاویه  $MAB$  کدام است؟

- (۱)  $22^\circ$   
 (۲)  $21^\circ$   
 (۳)  $24^\circ$   
 (۴)  $18^\circ$

۲۷- در شکل مقابل،  $AB$  قطر و  $\hat{B} = 3^\circ$  است. اگر شعاع دایره برابر ۶ باشد، اندازه  $BC$  کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{3}$   
 (۲)  $6\sqrt{3}$   
 (۳)  $6$   
 (۴)  $6\sqrt{2}$

۲۸- در دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $60$  واحد مطابق شکل مقابل طول کمان‌های  $\widehat{BC}$  و  $\widehat{CD}$  به ترتیب  $24\pi$

و  $10\pi$  است. نسبت دو زاویه محاطی  $\hat{BAD}$  به  $\hat{DAC}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{12}{5}$   
 (۲)  $\frac{17}{12}$   
 (۳)  $\frac{17}{5}$   
 (۴)  $\frac{17}{24}$

۲۹- در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ، دایره‌ای که از رئوس  $A, C$  و  $D$  می‌گذرد، امتداد  $BC$  را در  $M$  قطع می‌کند. اگر  $AB = 6$ ،  $AD = 3$  و  $\hat{A} = 10^\circ$  باشد، فاصله  $AM$  کدام است؟

- (۱)  $5$   
 (۲)  $6$   
 (۳)  $7$   
 (۴)  $8$

۳۰- در شکل مقابل مقدار  $x$  چه قدر است؟

- (۱)  $4^\circ$   
 (۲)  $5^\circ$   
 (۳)  $8^\circ$   
 (۴)  $10^\circ$





۳۱- در شکل روبه‌رو قطر  $AB$  و وتر  $CD$  موازی‌اند. اگر  $\widehat{DCE} = 65^\circ$  باشد، کمان  $BE$  چند درجه است؟

- (۱)  $25^\circ$
- (۲)  $32/5^\circ$
- (۳)  $35^\circ$
- (۴)  $65^\circ$

۳۲- مطابق شکل در دایره‌ای به قطر  $AB$ ، وتر  $CD$  موازی قطر  $AB$  رسم شده است. اندازه  $\widehat{ACD} - \widehat{ADC}$  کدام است؟

- (۱)  $30^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $90^\circ$

۳۳- در شکل زیر،  $O$  مرکز نیم‌دایره و  $CD \parallel AB$  است. اگر  $\widehat{CD} = 40^\circ$  باشد، اندازه زاویه  $x$  کدام است؟

- (۱)  $70^\circ$
- (۲)  $75^\circ$
- (۳)  $80^\circ$
- (۴)  $85^\circ$

۳۴- در شکل مقابل،  $O$  مرکز نیم‌دایره و  $CD \parallel AB$  است. اندازه کمان  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $70^\circ$
- (۲)  $80^\circ$
- (۳)  $90^\circ$
- (۴)  $100^\circ$

۳۵- در شکل روبه‌رو  $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان  $\widehat{ANB}$  چه کسری از محیط دایره است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{6}$
- (۴)  $\frac{1}{5}$

۳۶- در شکل مقابل  $x$  کدام است؟

- (۱)  $50^\circ$
- (۲)  $100^\circ$
- (۳)  $80^\circ$
- (۴)  $90^\circ$

۳۷- در شکل مقابل دو قطر  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند. اگر  $NM = NB$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱)  $30^\circ$
- (۲)  $22/5^\circ$
- (۳)  $15^\circ$
- (۴)  $25^\circ$

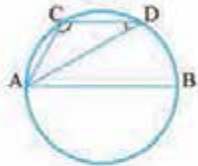
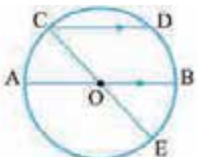
۳۸- در شکل مقابل  $AD$  مماس بر دایره به مرکز  $O$  و  $OH$  عمود بر  $AC$  است، اگر  $\widehat{DBC} = 2\widehat{DCA}$  باشد، زاویه  $\widehat{COH}$  چند برابر زاویه  $\widehat{DAC}$  است؟

(ریاضی ۹۷)

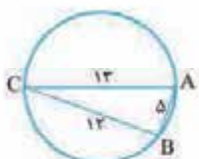
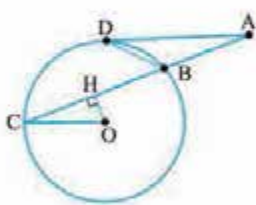
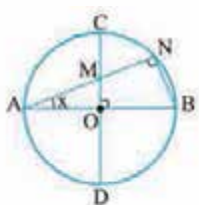
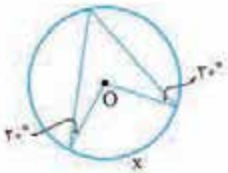
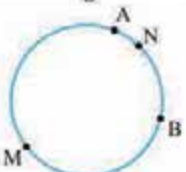
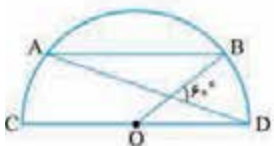
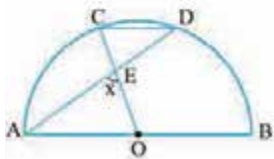
- (۱)  $2/5$
- (۲)  $3$
- (۳)  $3/5$
- (۴)  $4$

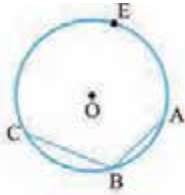
۳۹- در دایره مقابل،  $AB = 5$ ،  $BC = 12$  و  $AC = 13$  است. اندازه کمان  $AC$  کدام است؟

- (۱)  $180^\circ$
- (۲)  $150^\circ$
- (۳)  $120^\circ$
- (۴)  $90^\circ$



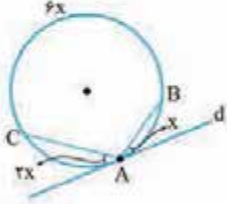
(کتاب درسی)





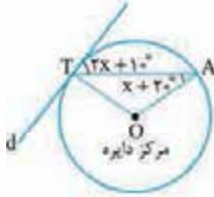
۴۰- در دایره  $C(O, 2)$  و  $AB = 2$  و  $BC = 2\sqrt{2}$  است. اندازه کمان  $AEC$  کدام است؟

- ۲۲۵° (۱)
- ۲۳۰° (۲)
- ۱۹۰° (۳)
- ۲۱۰° (۴)



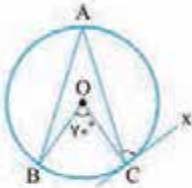
۴۱- در شکل مقابل خط  $d$  بر دایره مماس است.  $x$  چند درجه است؟

- ۱۰° (۱)
- ۲۰° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۴۰° (۴)



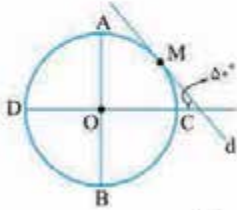
۴۲- در شکل مقابل خط  $d$  بر دایره مماس است. مقدار  $x$  چه قدر است؟

- ۲۰° (۱)
- ۲۵° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۳۵° (۴)



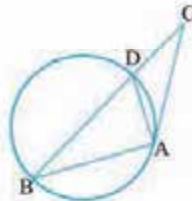
۴۳- در شکل مقابل،  $AB = AC$  و  $\widehat{BOC} = 70^\circ$  است. زاویه ظلّی  $ACx$  چند درجه است؟

- ۶۲/۵° (۱)
- ۶۵° (۲)
- ۶۷/۵° (۳)
- ۷۲/۵° (۴)



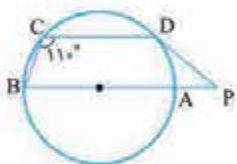
۴۴- در شکل مقابل قطرهای  $AB$  و  $CD$  بر هم عمود و خط  $d$  بر دایره مماس است. اندازه زاویه  $MOA$  کدام است؟

- ۶۰° (۱)
- ۶۵° (۲)
- ۵۰° (۳)
- ۵۵° (۴)



۴۵- در شکل مقابل،  $AC$  بر دایره مماس بوده و  $AB = AC = 6$ . اگر محیط مثلث  $ABD$  برابر ۱۶ باشد، اندازه  $BC$  کدام است؟

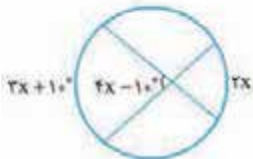
- ۸ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۰ (۴)



۴۶- در شکل داده شده اگر  $AB$  قطر دایره و  $\widehat{C} = 110^\circ$  باشد، آنگاه اندازه زاویه  $P$  چه قدر است؟

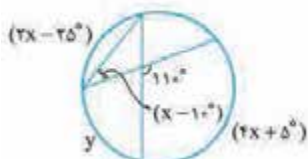
( $PD$  مماس بر دایره است.)

- ۵۰° (۱)
- ۴۵° (۳)
- ۶۰° (۲)
- ۵۵° (۴)



۴۷- در شکل مقابل  $x$  چند درجه است؟

- ۱۰° (۱)
- ۲۵° (۴)
- ۱۵° (۲)
- ۲۰° (۳)



۴۸- با توجه به شکل مقابل، مقدار  $y - x$  کدام است؟

- ۲۰° (۱)
- ۳۰° (۲)
- ۴۰° (۳)
- ۵۰° (۴)

۴۹- در شکل مقابل ۶ ضلعی، منتظم است.  $\hat{A}$  چند درجه است؟

- (۱)  $90^\circ$   
 (۲)  $120^\circ$   
 (۳)  $105^\circ$   
 (۴)  $130^\circ$

۵۰- در شکل مقابل، اندازه زاویه  $\alpha$  کدام است؟ (خط  $d$  بر دایره مماس است.)

- (۱)  $60^\circ$   
 (۲)  $5^\circ$   
 (۳)  $40^\circ$   
 (۴)  $3^\circ$

۵۱- در شکل مقدار  $y$  کدام است؟ ( $O$  مرکز دایره و  $d$  بر دایره مماس است.)

- (۱)  $34^\circ$   
 (۲)  $42^\circ$   
 (۳)  $56^\circ$   
 (۴)  $68^\circ$

۵۲- در شکل،  $O$  مرکز دایره و  $\hat{A} = 65^\circ$  و  $\hat{B} = 35^\circ$  زاویه  $C$  چند درجه است؟

- (۱)  $60^\circ$   
 (۲)  $61^\circ$   
 (۳)  $62^\circ$   
 (۴)  $63^\circ$

۵۳- در شکل مقابل،  $M$  وسط کمان  $AB$  و  $N$  وسط کمان  $AC$  است. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $AE = EB$   
 (۲)  $AF = FC$   
 (۳)  $AB = AC$   
 (۴)  $AE = AF$

۵۴- در شکل مقابل،  $M$  وسط کمان  $AB$  است، مجموع  $\hat{FKL} + \hat{LEF}$  چند درجه است؟

- (۱)  $90^\circ$   
 (۲)  $180^\circ$   
 (۳)  $125^\circ$   
 (۴)  $150^\circ$

۵۵- در شکل مقابل، اندازه  $\alpha$  چند درجه است؟

- (۱)  $5^\circ$   
 (۲)  $10^\circ$   
 (۳)  $20^\circ$   
 (۴)  $25^\circ$

۵۶- در شکل مقابل، مقدار  $x + y + z$  چه قدر است؟

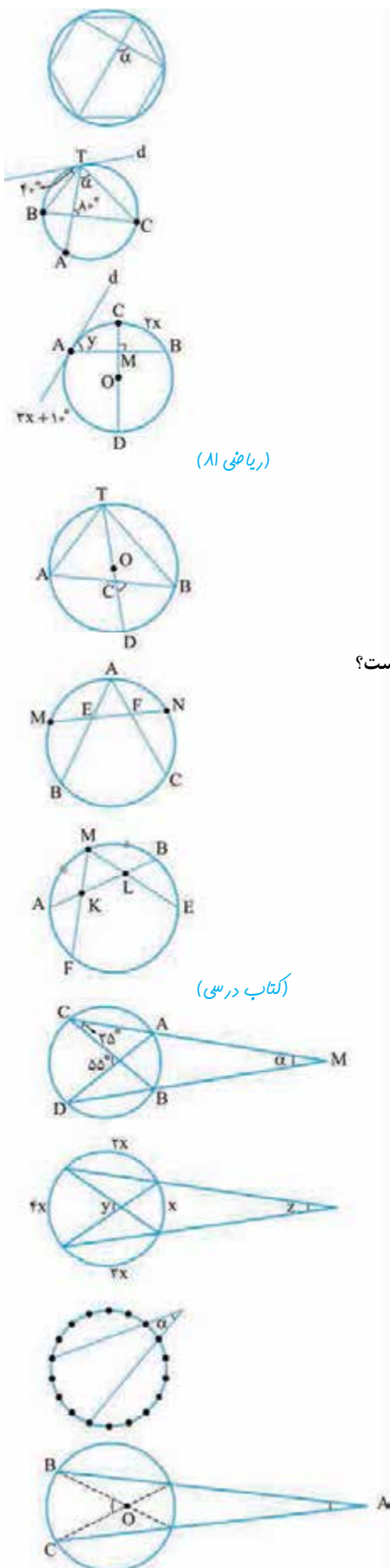
- (۱)  $180^\circ$   
 (۲)  $170^\circ$   
 (۳)  $160^\circ$   
 (۴)  $150^\circ$

۵۷- فاصله هر دو نقطه متوالی روی دایره با هم برابر است. زاویه  $\alpha$  چند درجه است؟

- (۱)  $22/5^\circ$   
 (۲)  $25^\circ$   
 (۳)  $27/5^\circ$   
 (۴)  $30^\circ$

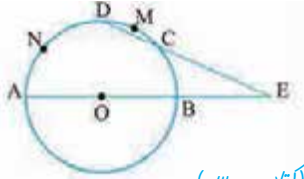
۵۸- در شکل مقابل  $\hat{A} = 27^\circ$  و  $\hat{O} = 71^\circ$ ، کمان  $BC$  چند درجه است؟

- (۱)  $98^\circ$   
 (۲)  $100^\circ$   
 (۳)  $102^\circ$   
 (۴)  $104^\circ$

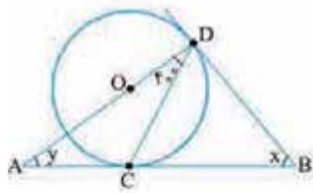
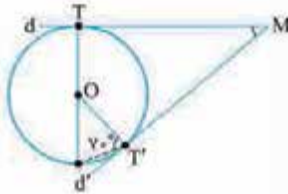
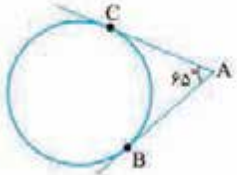
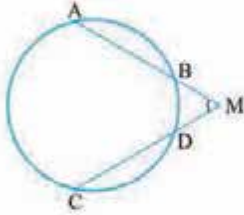
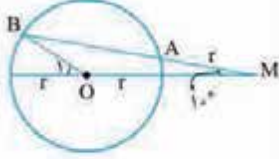


(ریاضی ۸)

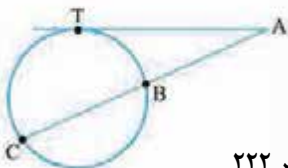
(کتاب درسی)



(کتاب درسی)

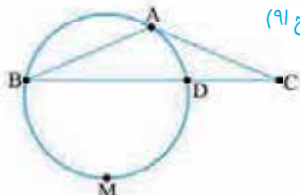


(کتاب درسی)



۶۶- در شکل مقابل، طول مماس AC بر دایره با طول وتر AB از دایره برابر است. اگر کمان DMB برابر ۲۲۲

(ریاضی قارچ ۹۱)



۵۹- O مرکز دایره،  $\widehat{DMC} = 30^\circ$  و  $\widehat{AND}$  مقدار کدام است؟

- ۱)  $85^\circ$
- ۲)  $95^\circ$
- ۳)  $105^\circ$
- ۴)  $115^\circ$

۶۰- در شکل MA برابر شعاع دایره است. اندازه زاویه  $O_1$  چند درجه است؟

- ۱)  $20^\circ$
- ۲)  $25^\circ$
- ۳)  $30^\circ$
- ۴)  $35^\circ$

۶۱- در شکل روبه‌رو،  $AB = CD$  است. هرگاه  $\widehat{M} = 60^\circ$  باشد اندازه کمان ACD چه قدر است؟

- ۱)  $22^\circ$
- ۲)  $24^\circ$
- ۳)  $26^\circ$
- ۴)  $28^\circ$

۶۲- در شکل مقابل  $\widehat{A} = 65^\circ$ ، کمان بزرگ‌تر BC کدام است؟

- ۱)  $235^\circ$
- ۲)  $245^\circ$
- ۳)  $255^\circ$
- ۴)  $265^\circ$

۶۳- در شکل مقابل O مرکز دایره و خطوط d و d' مماس بر دایره هستند. مقدار زاویه

M کدام است؟

- ۱)  $40^\circ$
- ۲)  $50^\circ$
- ۳)  $60^\circ$
- ۴)  $70^\circ$

۶۴- در شکل مقابل O مرکز دایره و نقاط C و D محل مماس شدن خطوط بر دایره هستند. مقدار

$x - y$  کدام است؟

- ۱)  $80^\circ$
- ۲)  $85^\circ$
- ۳)  $70^\circ$
- ۴)  $75^\circ$

۶۵- در شکل مقابل x چند درجه است؟

- ۱)  $105$
- ۲)  $110$
- ۳)  $115$
- ۴)  $120$

۶۶- در شکل، AT مماس و  $\widehat{BC} = \widehat{CT} = \widehat{BT}$ ، زاویه A چند درجه است؟

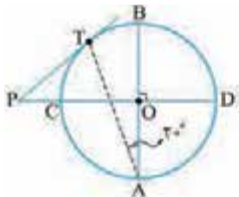
- ۱)  $18^\circ$
- ۲)  $72^\circ$
- ۳)  $36^\circ$
- ۴)  $144^\circ$

۶۷- در شکل مقابل، طول مماس AC بر دایره با طول وتر AB از دایره برابر است. اگر کمان DMB برابر ۲۲۲

درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟

- ۱)  $21^\circ$
- ۲)  $22^\circ$
- ۳)  $23^\circ$
- ۴)  $24^\circ$





۶۸- در شکل مقابل  $\hat{A} = 20^\circ$  و  $PT$  بر دایره مماس است. زاویه  $P$  چند درجه است؟

- (۱)  $20^\circ$  (۲)  $30^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $50^\circ$

۶۹- در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) نقطه  $O$  در امتداد  $AC$  مرکز دایره‌ای است که در نقطه  $B$  بر ضلع  $AB$  مماس است و امتداد  $BC$  را در نقطه  $D$  قطع کرده است. مثلث  $OCD$  چگونه است؟

(ریاضی ۹۴)

- (۱) متساوی الساقین (۲) قائم الزاویه (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین (۴) غیر مشخص

۷۰- دو خط  $d_1$  و  $d_2$  متقاطع اند. چند دایره می توان رسم کرد که شعاع آن‌ها ۲، مرکزشان روی خط  $d_1$  و بر خط  $d_2$  مماس باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷۱- دو خط  $d_1$  و  $d_2$  موازی اند. مرکز همه دایره‌هایی که بر این دو خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟

- (۱) دو خط موازی با خط  $d_1$  و  $d_2$  (۲) یک خط عمود بر خط  $d_1$  و  $d_2$  (۳) یک خط موازی با خط  $d_1$  و  $d_2$  (۴) سه خط موازی با خط  $d_1$  و  $d_2$

۷۲- دو خط متقاطع  $d_1$  و  $d_2$  مفروض اند که نقطه  $A$  محل تلاقی آن‌ها است. مرکز همه دایره‌هایی که بر هر دو خط  $d_1$  و  $d_2$  مماس اند، روی چه شکلی هستند؟

- (۱) دو خط موازی (۲) یک خط گذرنده از نقطه  $A$  (۳) دو خط عمود بر هم که نقطه  $A$  محل تلاقی آن‌ها است (۴) چهار خط دایره دو موازی

۷۳- نقاط  $A$  و  $B$  مفروض اند. مرکز همه دایره‌هایی که از این دو نقطه عبور می کنند، روی چه شکلی هستند؟

- (۱) خطی موازی پاره خط  $AB$  (۲) دو خط عمود بر پاره خط  $AB$  که از نقاط  $A$  و  $B$  عبور می کنند. (۳) عمود منصف پاره خط  $AB$  (۴) دو خط موازی پاره خط  $AB$

۷۴- از دو نقطه به فاصله ۵ چند دایره می گذرد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷۵- از دو نقطه به فاصله ۵ چند دایره به شعاع ۳ عبور می کند؟

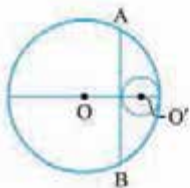
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷۶- از دو سر پاره خط  $AB = 4$  فقط یک دایره به شعاع  $2 - 2m$  عبور می کند، چند مقدار صحیح برای  $m$  وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

## سوی

۷۷- مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ مماس داخل اند. اگر پاره خط  $AB$  کوتاه‌ترین وتر از دایره بزرگ‌تر باشد که بر دایره کوچک‌تر مماس است. اندازه کمان  $AB$  چند درجه است؟

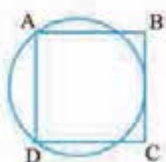


- (۱)  $120^\circ$  (۲)  $135^\circ$  (۳)  $150^\circ$  (۴)  $160^\circ$

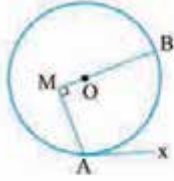
۷۸- در یک مستطیل به ابعاد ۲۶ و ۱۲، دو نیم دایره به قطر طول مستطیل، اضلاع مستطیل را در چهار نقطه قطع می کنند. مساحت چهارضلعی حاصل از این چهار نقطه کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۱۰

۷۹- مربع  $ABCD$  به ضلع ۸ مفروض است. شعاع دایره‌ای که از دو رأس  $A$  و  $D$  می گذرد و بر ضلع  $BC$  مماس است کدام است؟



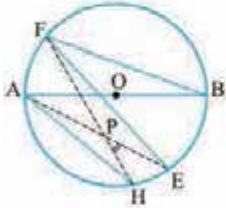
- (۱) ۴ (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$  (۴) ۵



۸۰- در شکل مقابل  $\widehat{xAM} = 12^\circ$  است. کمان AB چه کسری از محیط دایره است؟

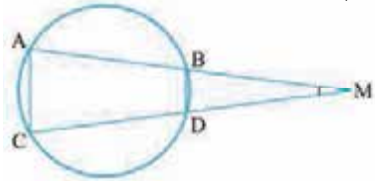
- (۱)  $\frac{1}{3}$
- (۲)  $\frac{1}{4}$
- (۳)  $\frac{3}{5}$
- (۴)  $\frac{3}{7}$

۸۱- در شکل AB قطری از دایره و  $AH \parallel EF$  است، اگر  $\widehat{FBA} = 2^\circ$  در این صورت زاویه HPE برابر است با:



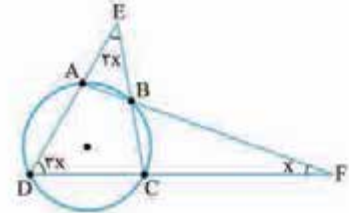
- (۱)  $25^\circ$
- (۲)  $3^\circ$
- (۳)  $35^\circ$
- (۴)  $4^\circ$

۸۲- در شکل،  $AC = \sqrt{2}R$  و  $BD = R$ ، آن گاه اندازه زاویه M برابر است با: (R شعاع دایره است.)



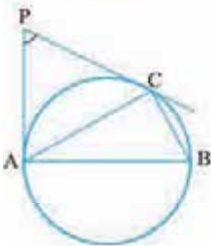
- (۱)  $15^\circ$
- (۲)  $3^\circ$
- (۳)  $45^\circ$
- (۴)  $6^\circ$

۸۳- در شکل مقابل، x چند درجه است؟



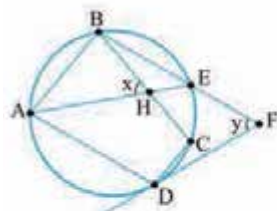
- (۱)  $15^\circ$
- (۲)  $2^\circ$
- (۳)  $25^\circ$
- (۴)  $3^\circ$

۸۴- در شکل مقابل  $BC = 1$ ،  $AC = \sqrt{3}$  و  $AB = 2$  است. زاویه P کدام است؟



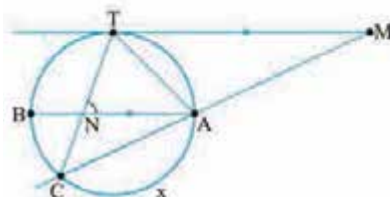
- (۱)  $25^\circ$
- (۲)  $3^\circ$
- (۳)  $4^\circ$
- (۴)  $6^\circ$

۸۵- در شکل زیر، DF بر دایره مماس است. اگر  $AD \parallel BF$ ،  $AB \parallel DC$ ،  $\widehat{AB} = 80^\circ$  و  $\widehat{CD} = 40^\circ$  باشد مقدار  $x - y$  کدام است؟



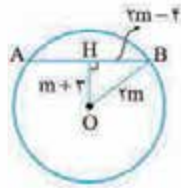
- (۱)  $2^\circ$
- (۲)  $3^\circ$
- (۳)  $4^\circ$
- (۴) صفر

۸۶- در شکل زیر MT مماس بر دایره و AB موازی MT است. اگر  $\widehat{M} = 25^\circ$  و  $\widehat{ANT} = 80^\circ$  باشد، کمان AC چند درجه است؟



- (۱)  $11^\circ$
- (۲)  $10^\circ$
- (۳)  $12^\circ$
- (۴)  $9^\circ$

۷- گزینه ۱ با توجه به این که می‌دانیم در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OHB داریم:



$$\Delta OHB : OB^2 = OH^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow (2m)^2 = (m+r)^2 + (r-m)^2$$

$$\Rightarrow 4m^2 = m^2 + 6m + 9 + 4m^2 - 16m + 16$$

$$\Rightarrow m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m = 5$$

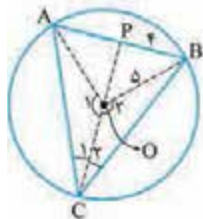
۸- گزینه ۱ می‌دانیم کوچک‌ترین وتر گذرنده از A، نقطه‌ای درون دایره، وتری عمود بر شعاع OA می‌باشد و قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:

$$\Delta OAC \text{ قائم الزاویه} \Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 4^2 + AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC = 2AC = 2\sqrt{2}$$

۹- گزینه ۱ بیشترین مقدار مساحت زمانی به دست می‌آید که زاویه C در دورترین فاصله از AB قرار بگیرد. این مقدار زمانی به دست می‌آید که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد. در این حالت ارتفاع CP، نیمساز و میانه نیز هست. در مثلث OBP ابتدا اندازه OP را به دست می‌آوریم:



$$OP^2 = OB^2 - PB^2$$

$$= 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OP = 3$$

در نتیجه ارتفاع CP برابر است با:

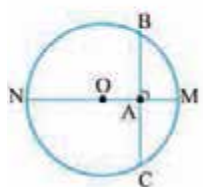
$$CP = CO + OP = 5 + 3 = 8$$

$$S = \frac{8 \times 8}{2} = 32 \text{ مساحت مثلث در بیشترین حالت برابر است با:}$$

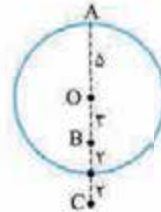
۱۰- گزینه ۱ بزرگ‌ترین وتری که از هر نقطه می‌گذرد، می‌شود قطر گذرنده از آن‌جا.

کوچک‌ترین وتری که از هر نقطه می‌گذرد، می‌شود وتر عمود بر قطر گذرنده از آن‌جا.

در این شکل کوتاه‌ترین و بلندترین گذرنده از نقطه A به ترتیب وتر BC و قطر MN هستند.



۱- گزینه ۱ فاصله نقطه A از مرکز برابر شعاع دایره است، پس A روی دایره نشسته است. فاصله B و C از مرکز به ترتیب کم‌تر و بیشتر از شعاع است و این یعنی B داخل و C خارج دایره هستند. برای این که ببینید چرا غلط است و چرا درست به این شکل نگاه کنید.



$$B \text{ از } A \text{ حداکثر فاصله} = 5 + 3 = 8$$

$$BC = 2 + 2 = 4 < 5$$

۲- گزینه ۱ این نقاط درون دایره‌ای به شعاع ۳ قرار می‌گیرند. پس باید مساحت این دایره را پیدا کنیم که می‌شود  $9\pi$ .

۳- گزینه ۱ باید فاصله نقطه A از O بیشتر از ۳ و کم‌تر از ۵ باشد:



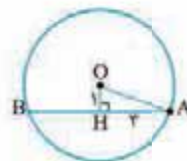
$$3 < 2x - 5 < 5$$

$$\Rightarrow 8 < 2x < 10$$

$$\Rightarrow 4 < x < 5$$

۴- گزینه ۱ حواستان باشد هر قطری از وسط وتر و کمان AB عبور نمی‌کند. باید این قطر بر وتر عمود باشد تا از وسط وتر و کمان آن عبور کند.

۵- گزینه ۱ می‌دانیم در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OHA داریم:



$$\Delta OHA : OA^2 = OH^2 + AH^2$$

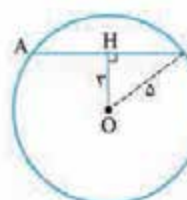
$$\Rightarrow OA^2 = 1^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

۶- گزینه ۱ خوب کافی است این شکل را بکشیم و در مثلث BHO فیثاغورس بنویسیم:

$$OH^2 + BH^2 = BO^2$$

$$\Rightarrow 3^2 + BH^2 = 5^2 \Rightarrow BH = 4$$



پس طول وتر AB می‌شود  $2 \times 4 = 8$ .

۱۶- **گزینه ۳** فاصله یک خط از مرکز دایره‌ای که بر آن مماس است می‌شود همان شعاع دایره. پس معادله  $2x - 3 = 5$  را داریم که می‌رسیم به  $x = 4$ .

۱۷- **گزینه ۳**  $x > 2$  است، پس  $3x > 6$  و  $3x - 1 > 5$  می‌شود. این یعنی فاصله خط  $d$  از مرکز دایره بیشتر از شعاع است. در نتیجه خط  $d$  دایره را قطع نمی‌کند.

۱۸- **گزینه ۳** دایره‌ای که بر خط  $d$  مماس باشد باید فاصله مرکزش تا خط  $d$  برابر  $R$  باشد. به این شکل نگاه کنید.

مرکز دایره‌های مماس روی دو خط  $d_1$  و  $d_2$  افتاده‌اند که با خط  $d$  موازی‌اند و فاصله‌شان از خط  $d$  همان  $R$  است.

۱۹- **گزینه ۳** وقتی خط  $d$  بر دایره‌ای در نقطه  $A$  مماس باشد، بر شعاع گذرنده از نقطه  $A$  عمود است. پس مرکز این دایره‌ها روی خطی عمود بر خط  $d$  قرار می‌گیرند که از نقطه  $A$  عبور می‌کند. (خط  $d'$ )

۲۰- **گزینه ۳** شکل را رسم می‌کنیم و از مرکز دایره عمود  $OH$  را بر وتر  $BC$  رسم می‌کنیم که می‌دانیم  $OH$  وتر  $BC$  را نصف می‌کند، شعاع  $O'P$  را در دایره کوچک‌تر هم می‌کشیم که بر خط مماس بر این دایره عمود شود، در نتیجه:

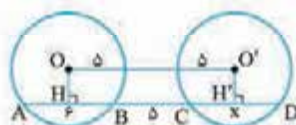
مربع  $\Rightarrow$  چهارضلعی  $HPO'O$   
 $\Rightarrow PH = 4$

$\Delta OBH$  در:  $BH = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$   
 $OH \Rightarrow BH = HC = 4\sqrt{3}$   
 $PC = HC - HP = 4\sqrt{3} - 4$   
 $PB = BH + HP = 4\sqrt{3} + 4$   
 $PC \times PB = (4\sqrt{3} - 4)(4\sqrt{3} + 4)$   
 $= 16 \times 3 - 16 \times 1 = 16 \times 2 = 32$

۱۱- **گزینه ۳** یادتان باشد هر وتری که بزرگ‌تر باشد به مرکز نزدیک‌تر است. پس در این‌جا باید  $2x + 6 < 5x - 3$  باشد که نتیجه‌اش می‌شود  $x < 3$ .

صبر کنید، عجله نکنید! فاصله عددی نامنفی است، پس:  
 $2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$   
 $5x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{5}$   
 حالا باید از سه نامساوی به دست آمده اشتراک بگیریم که می‌رسیم به:  
 $\frac{3}{5} < x < 3$

۱۲- **گزینه ۳**  $AD$  و  $OO'$  موازی هستند، پس مرکز دو دایره فاصله یکسانی از وترهای  $AB$  و  $CD$  دارند. این یعنی طول این دو وتر یکسان است و در نتیجه  $x = 6$ .



۱۳- **گزینه ۳** می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس در مثلث  $TOH$  داریم:

$\Delta TOH : \hat{HTO} = 6^\circ \Rightarrow \sin \hat{T}_1 = \frac{OH}{OT}$   
 $\Rightarrow \sin 6^\circ = \frac{OH}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{2\sqrt{3}}$   
 $\Rightarrow OH = 3$

۱۴- **گزینه ۳** از نقطه  $O$  بر وتر  $AB$  عمود می‌کشیم تا مثلث  $OHB$  تشکیل شود. با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:

$\Delta OHB : OB^2 = OH^2 + HB^2$   
 $\frac{HB=8}{OB=R=10} \Rightarrow 10^2 = OH^2 + 8^2 \Rightarrow OH = 6$

پس فاصله وسط این وترها از مرکز دایره مقدار ثابت ۶ می‌باشد؛ در نتیجه مکان هندسی این نقاط، دایره‌ای به شعاع ۶ و به مرکز  $O$  است.

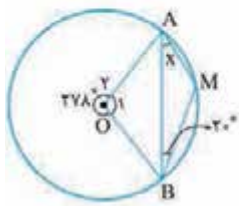
۱۵- **گزینه ۳** یک چیزی برایتان بگویم که خیالتان راحت شود. هرگاه سؤالی داشتیم که به طول وتر و شعاع دایره مربوط بود از مرکز بر وتر عمود رسم کنید. دقت کنید که این عمود درست می‌خورد به وسط وتر. با این حساب یک چنین شکلی و چنین اندازه‌هایی داریم. حالا کافی است در مثلث  $BHO$  یا  $CGO$  فیثاغورس بنویسیم. فرقی ندارد:

$\Delta BHO : OH^2 + BH^2 = BO^2$   
 $\Rightarrow (\frac{5}{3})^2 + 5^2 = r^2$   
 $\Rightarrow r = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$



۲۶- **گزینه ۲** می دانیم اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف

اندازه کمان مقابلش است. بنابراین داریم:



$$\begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 36^\circ \\ \Rightarrow 27x + \hat{O}_1 &= 36^\circ \\ \Rightarrow \hat{O}_1 &= 81^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{O}_1 = \widehat{AMB} \xrightarrow{\hat{O}_1 = 81^\circ} \widehat{AMB} = 81^\circ \quad (1)$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AM}}{2} \xrightarrow{\hat{B} = 2^\circ} 2^\circ = \frac{\widehat{AM}}{2} \Rightarrow \widehat{AM} = 4^\circ \quad (2)$$

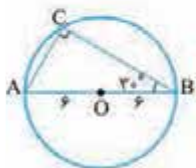
با استفاده از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{AMB} &= \widehat{AM} + \widehat{MB} \\ \Rightarrow 81^\circ &= 4^\circ + \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{MB} = 42^\circ \end{aligned}$$

$$x = \hat{A} = \frac{\widehat{MB}}{2} = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$$

۲۷- **گزینه ۲** مثلث ABC در رأس C قائمه است زیرا زاویه

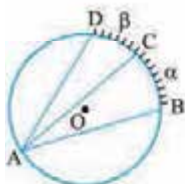
محاطی روبه رو به قطر قائمه است. داریم:



$$\begin{aligned} \cos 3^\circ &= \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{12} \\ \Rightarrow BC &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

۲۸- **گزینه ۲** از رابطه زاویه مرکزی  $\times$  شعاع = طول کمان که در

درس حسابان می خوانید، داریم:



$$\begin{aligned} \widehat{BC} \text{ طول} &= \frac{\alpha}{36^\circ} \times 2\pi \times 60 = 24\pi \\ \Rightarrow \alpha &= 72^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{DC} \text{ طول} = \frac{\beta}{36^\circ} \times 2\pi \times 60 = 10\pi \Rightarrow \beta = 3^\circ$$

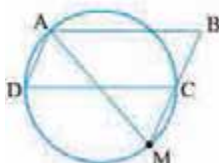
حالا نسبت زاویه ها را حساب می کنیم:

$$\frac{\hat{BAD}}{\hat{DAC}} = \frac{\frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} = \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{102}{30} = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$$

۲۹- **گزینه ۲** بیاید M را به A وصل کنیم تا ببینیم چه خبر

است. خوب قبول دارید که  $\hat{D} = \hat{M}$  است؟ چون هر دو می شوند

از طرفی  $\hat{B} = \hat{D}$  است (متوازی الاضلاع که یادتان هست!)



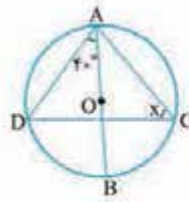
پس  $\hat{M} = \hat{B}$  می شود و این یعنی مثلث

ABM متساوی الساقین است بنابراین

$$AM = AB = 6$$

۲۱- **گزینه ۲** زاویه محاطی  $40^\circ$  ای

که داده شده به ما می گوید  $\widehat{DB} = 80^\circ$ .



پس  $\widehat{AD} = 100^\circ$  (چرا؟) و این یعنی:

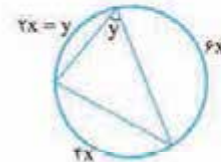
$$\hat{x} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

۲۲- **گزینه ۲** زاویه محاطی y به ما می گوید که  $y = \frac{4x}{2} = 2x$

پس کمان y را می نویسیم  $2x$  و این یعنی  $2x + 4x + 6x = 36^\circ$

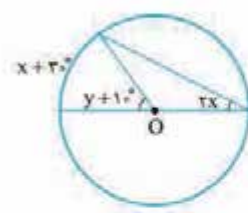
در نتیجه  $x = 30^\circ$  بنابراین

$$x + y = 90^\circ$$



۲۳- **گزینه ۲** زاویه محاطی و  $y + 10^\circ$  زاویه مرکزی

است. پس:



$$\begin{cases} 2x = \frac{x + 30^\circ}{2} \Rightarrow 4x = x + 30^\circ \\ \Rightarrow x = 10^\circ \\ y + 10^\circ = x + 30^\circ \\ \xrightarrow{x = 10^\circ} y = 30^\circ \end{cases}$$

حالا  $x + y$  را می خواهیم که می شود  $40^\circ$ .

۲۴- **گزینه ۲** به خاطر زاویه مرکزی O می توانیم بگوییم

$\widehat{ABC} = 140^\circ$  و این یعنی کمان بزرگ تر AC می شود

$$360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$$

پس زاویه محاطی B برابر با

$$\frac{220^\circ}{2} = 110^\circ$$

که  $\hat{A} = \hat{C} = x$  (چرا؟) و در چهارضلعی

ABCO داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = 360^\circ \Rightarrow 2x + 25^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 110^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$$

۲۵- **گزینه ۲** با توجه به این که اندازه هر زاویه محاطی برابر

با نصف اندازه کمان مقابلش است، داریم:

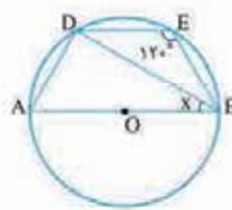
$$\hat{E} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = 240^\circ$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{AB} + \widehat{AD}$$

$$\xrightarrow{\widehat{AB} = 180^\circ} 240^\circ = 180^\circ + \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 60^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



۳۰- زاویه مرکزی و زاویه محاطی است، پس  $\hat{O}_1 = x$  و  $\hat{D}_1 = \frac{x}{2}$ . در نتیجه  $x + \frac{x}{2} = 60^\circ$  که نتیجه اش  $x = 40^\circ$  است. حالا به راحتی می‌رسیم به  $y = 100^\circ$ .

۳۵- می‌دانیم مجموع کمان‌های یک دایره برابر با  $360^\circ$  می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AMB} &= 4\widehat{ANB} \\ \widehat{AMB} + \widehat{ANB} &= 360^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB}} = \frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5}$$

محیط دایره

دقت کنید که البته نیازی به محاسبه مقدار  $\widehat{ANB}$  نبود، زیرا با کمک خواص تناسب این نسبت به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB} + \widehat{ANB}} = \frac{1}{5}$$

۳۶- از نقطه  $O$  به  $A$  وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه  $D$  قطع کند. با توجه به این که مثلث‌های  $OAC$  و  $OAB$  متساوی‌الساقین اند، داریم:

$$\triangle AOB : \hat{A}_r = \hat{B} \Rightarrow \hat{A}_r = 20^\circ$$

$$\triangle AOC : \hat{A}_1 = \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$$

$\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_r$  به ترتیب زوایای خارجی مثلث‌های  $OAB$  و  $OAC$  می‌باشند، پس:

$$\hat{O}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ, \hat{O}_r = \hat{A}_r + \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_r = 40^\circ$$

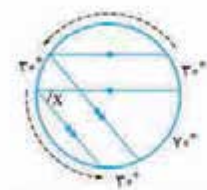
$$x = \widehat{BDC} = \widehat{BD} + \widehat{CD} \xrightarrow[\hat{O}_r = \widehat{BD}]{\hat{O}_1 = \widehat{CD}} \hat{x} = 100^\circ$$

۳۷- از  $M$  به  $B$  وصل می‌کنیم، زاویه  $N$  روبه‌رو به قطر  $AB$  بوده، پس برابر  $90^\circ$  درجه است، در نتیجه  $\hat{M}_1 = \hat{B}_r = 45^\circ$  خواهد بود.

از طرفی چون  $M$  بر روی عمود منصف  $AB$  است از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، در نتیجه  $MA = MB$  و در واقع  $\hat{B}_1 = x$  است.  $\hat{M}_1$  زاویه خارجی مثلث  $AMB$  است، بنابراین داریم:

$$\hat{M}_1 = x + \hat{B}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = x} \hat{M}_1 = 2x = 45^\circ \Rightarrow x = 22.5^\circ$$

۳۰- کمان‌های بین دو وتر موازی برابر هستند. پس شکل این‌طوری می‌شود و  $x = \frac{70^\circ + 30^\circ}{2} = 50^\circ$ .



۳۱- با توجه به این که زوایای  $O_1$  و  $O_r$  متقابل به رأس و زوایای مرکزی می‌باشند ( $\hat{O}_1 = \hat{O}_r \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$ ) می‌دانیم در یک دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\xrightarrow{\widehat{AC} = \widehat{BE}} \widehat{BE} = \widehat{BD}$$

$$\widehat{DCE} = \frac{\widehat{DE}}{2} \xrightarrow{\widehat{DCE} = 65^\circ} \widehat{DE} = 130^\circ$$

$$2\widehat{BE} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 65^\circ$$

۳۲- می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} - \widehat{ADC} = \frac{\widehat{DBA}}{2} - \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{BD} + \widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$

با توجه به تساوی دو کمان  $\widehat{BD}$  و  $\widehat{AC}$  خواهیم داشت:

$$\widehat{ACD} - \widehat{ADC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

۳۳-  $CD \parallel AB$  است و این یعنی  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ .

از طرفی مجموع کمان‌های نیم‌دایره  $180^\circ$  است و این یعنی باید

$\widehat{AC} = \widehat{BD} = 70^\circ$  باشد، چون  $\widehat{CD} = 40^\circ$  بود حالا زوایای  $A_1$  و  $O_1$  در دستان شما است:

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ, \hat{O}_1 = 70^\circ$$

پس می‌توانیم زاویه  $x$  را پیدا کنیم:

$$x + \hat{A}_1 + \hat{O}_1 = 180^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$$

۳۴- کمان‌ها را این‌طوری نام‌گذاری می‌کنیم. دقت کنید که  $AB \parallel CD$  است و این یعنی  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ . حالا این روابط را داریم:

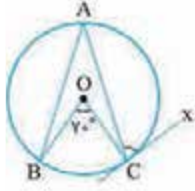
$$(مجموع کمان‌های نیم‌دایره) \quad x + x + y = 180^\circ$$

$$\hat{O}_1 + \hat{D}_1 = 60^\circ \quad (\text{زاویه خارجی مثلث})$$



۴۳- کربنه مجموع کمان‌های ایجاد شده در دایره برابر با  $36^\circ$  است.

$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 36^\circ \xrightarrow{\widehat{O}=\widehat{BC}=7^\circ} \widehat{AB} + \widehat{AC} = 29^\circ$   
با توجه به این که کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره، با هم برابرند، بنابراین داریم:



$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

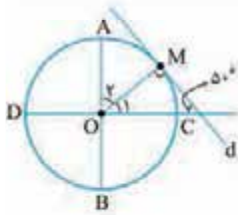
$$= \frac{29^\circ}{2} = 14.5^\circ$$

می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است،

لذا خواهیم داشت:

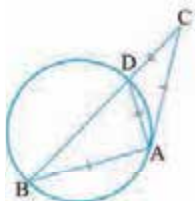
$$\widehat{ACx} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{14.5^\circ}{2} = 7.25^\circ$$

۴۴- کربنه کافی است O را به M وصل کنیم که OM بر d عمود می‌شود. پس  $\widehat{O}_1 = 4^\circ$  و در نتیجه  $\widehat{O}_2 = 5^\circ$  می‌شود.



۴۵- کربنه می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی و محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است. بنابراین داریم:

$$\triangle ABC: AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{B}=\frac{\widehat{AD}}{2}} \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \quad (1)$$



$$\widehat{CAD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \xrightarrow{(1)} \widehat{CAD} = \widehat{C}$$

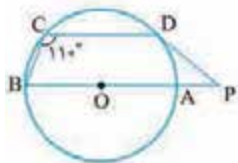
$$\Rightarrow AD = CD$$

$$\triangle ABD: AB + AD + BD = 16$$

$$\xrightarrow{AC=6, AD=CD} 6 + CD + BD = 16$$

$$\Rightarrow CD + BD = BC = 10$$

۴۶- کربنه می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است. داریم:



$$\widehat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \Rightarrow 11^\circ = \frac{\widehat{DAB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = 22^\circ$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{AB} + \widehat{AD} \xrightarrow{\widehat{AB}=18^\circ} 22^\circ = 18^\circ + \widehat{AD}$$

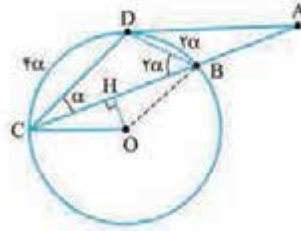
$$\Rightarrow \widehat{AD} = 4^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 18^\circ - 4^\circ = 14^\circ$$

با توجه به این که زاویه بین مماس و امتداد یک وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، لذا خواهیم داشت:

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{14^\circ - 4^\circ}{2} = 5^\circ$$

۳۸- کربنه نقطه D را به C و B و O وصل می‌کنیم.

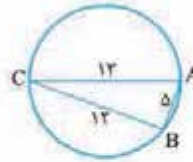
حالا با نام‌گذاری شکل را قشنگ‌تر می‌بینیم کمان BD روبه‌روی زاویه  $\alpha$  است، پس  $\widehat{BD} = 2\alpha$  و به همین شکل می‌توانیم بگوییم  $\widehat{CD} = 2 \times \widehat{DBC} = 4\alpha$  حالا با توجه به اینکه OH بر BC عمود است باید گفت:  $\widehat{COH} = \frac{1}{2} \times \widehat{COB} = 3\alpha$ ، زیرا  $\widehat{COB} = \widehat{BC}$ . پیدا کردن زاویه A هم که کاری ندارد:  $\widehat{A} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} = \alpha$  دیگه بقیه‌اش را خودتان بگویید بی‌زحمت.



۳۹- کربنه در مثلث ABC بین اضلاع رابطه فیثاغورس برقرار است:

$$13^2 = 5^2 + 12^2$$

پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و این یعنی  $\widehat{B} = 90^\circ$  و در نتیجه آن  $\widehat{AC} = 180^\circ$ .



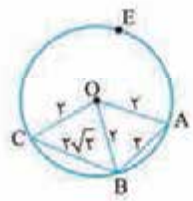
۴۰- کربنه بیایید نقطه O را به سه نقطه A، B، C وصل کنیم. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است چون هر سه ضلع آن برابر هستند. در مثلث OBC هم رابطه فیثاغورس برقرار است، چون

$$2^2 + 2^2 = (2\sqrt{2})^2$$

در نتیجه:

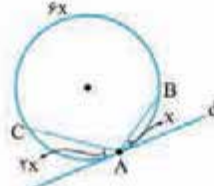
$$\widehat{COA} = 90^\circ + 6^\circ = 150^\circ$$

این یعنی اندازه کمان ABC می‌شود  $150^\circ$  پس  $\widehat{AEC} = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$



۴۱- کربنه هر زاویه ظلی نصف کمانش است. پس

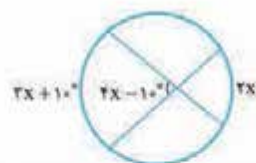
حالا می‌توانیم بگوییم  $\widehat{AC} = 4x$  و  $\widehat{AB} = 2x$  (مجموع کمان‌ها در دایره) که این یعنی  $x = 3^\circ$ .



۴۲- کربنه مثلث OTA متساوی‌الساقین است

( $OT = OA = R$ ) و این یعنی  $\widehat{OTA} = \widehat{A} = x + 2^\circ$  حالا می‌دانیم که شعاع OT بر خط مماس عمود است. در نتیجه  $(2x + 10^\circ) + (x + 2^\circ) = 90^\circ$  می‌شود که می‌رسیم به  $x = 2^\circ$ .

۴۷- کزبینه: یک زاویه وتری داخلی داریم. پس راحت فرمولش را می نویسیم:



$$4x - 10^\circ = \frac{3x + 10^\circ + 2x}{2}$$

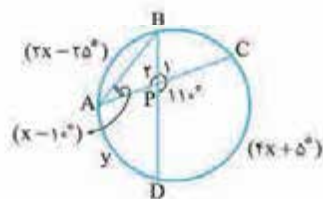
$$\Rightarrow 8x - 20^\circ = 5x + 10^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 30^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$$

۴۸- کزبینه: می دانیم زاویه بین دو وتر متقاطع، برابر با نصف مجموع اندازه کمان های مقابلش است. بنابراین داریم:

$$\hat{P}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{(2x - 25) + (4x + 5)}{2} = 11^\circ$$

$$\Rightarrow 6x - 20^\circ = 22^\circ \Rightarrow x = 4^\circ$$



پس:

$$A = x - 10^\circ = 3^\circ$$

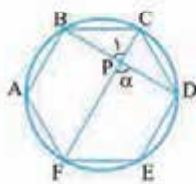
$$\Rightarrow \widehat{BC} = 6^\circ$$

زاویه  $P_1$  مجانب زاویه  $P_2$  است. پس:  $P_1 = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$ . طبق رابطه زاویه بین دو وتر متقاطع داریم:

$$P_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 7^\circ = \frac{y + 6^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow y = 8^\circ \Rightarrow y - x = 4^\circ$$

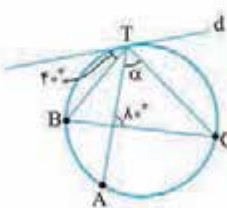
۴۹- کزبینه: می دانیم کمان های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره با هم برابرند. بنابراین همه کمان های نظیر اضلاع شش ضلعی منتظم با هم برابر و  $60^\circ$  هستند.



طبق رابطه محاسبه زاویه بین دو وتر متقاطع داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{DF} + \widehat{BC}}{2} = \frac{12^\circ + 6^\circ}{2} = 9^\circ$$

۵۰- کزبینه: زاویه ظلی داده شده به ما می گوید  $\widehat{BT} = 8^\circ$ . حالا یک زاویه وتری داخلی داریم که نتیجه اش می شود:



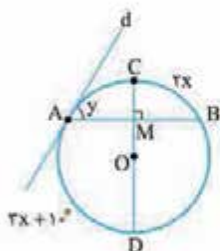
$$\frac{\widehat{AB} + \widehat{CT}}{2} = 8^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CT} = 16^\circ$$

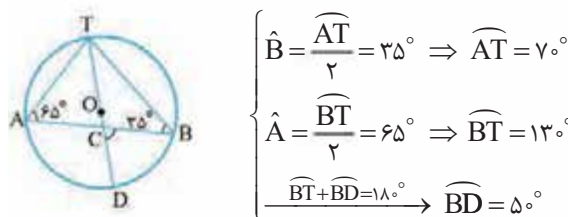
بنابراین کمان AC می شود  $12^\circ$ ، چون مجموع کمان های دایره  $360^\circ$  است.

حالا زاویه  $\alpha$  را می خواهیم که هست  $\frac{\widehat{AC}}{2}$  یعنی  $6^\circ$ .

۵۱- کزبینه: زاویه وتری M به ما می گوید که  $2x + 10^\circ + 3x = 18^\circ$  یعنی  $3x + 10^\circ = 18^\circ - 2x$ . حالا زاویه ظلی y را می خواهیم که می شود  $\frac{\widehat{ACB}}{2}$  یعنی  $2x = 68^\circ$ . حواستان باشد که قطر CD بر وتر AB عمود است و این یعنی  $\widehat{CB}$  نصف  $\widehat{ACB}$  است.



۵۲- کزبینه: اندازه هر زاویه محاطی با نصف اندازه کمان مقابلش برابر است، بنابراین داریم:

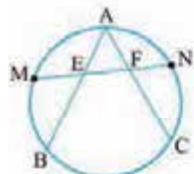


$$\begin{cases} \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = 70^\circ \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BT}}{2} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 130^\circ \\ \widehat{BT} + \widehat{BD} = 180^\circ \rightarrow \widehat{BD} = 50^\circ \end{cases}$$

می دانیم اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع، برابر با نصف مجموع اندازه کمان های مقابلش است. لذا خواهیم داشت:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AT}}{2} = \frac{50^\circ + 70^\circ}{2} = 60^\circ$$

۵۳- کزبینه: به دو زاویه وتری E و F توجه کنید:

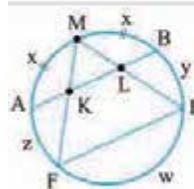


$$\hat{AEF} = \frac{\widehat{AN} + \widehat{MB}}{2}$$

$$\hat{AFE} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{NC}}{2}$$

حالا با توجه به M و N که وسط کمان ها هستند متوجه می شویم که  $\widehat{AN} = \widehat{NC}$  و  $\widehat{AM} = \widehat{MB}$  و این یعنی  $\hat{AEF} = \hat{AFE}$ . پس مثلث AEF متساوی الساقین است و در نتیجه  $AE = AF$ .

۵۴- کزبینه: کافی است از E به F وصل کنید و زاویه ها را بنویسیم:

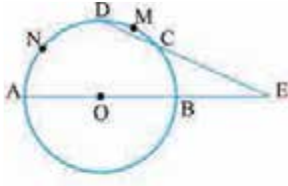


$$\hat{FKL} = \frac{\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{w}}{2}$$

$$+ \hat{LEF} = \frac{\widehat{x} + \widehat{z}}{2}$$

$$\hat{FKL} + \hat{LEF} = \frac{2\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{w} + \widehat{z}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



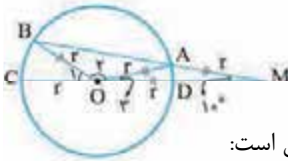


۵۹- گزینه ۲ می‌دانیم

اندازه زاویه بین امتداد دو وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \hat{E} &= \frac{\widehat{AND} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 3^\circ = \frac{\widehat{AND} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AND} - \widehat{BC} = 6^\circ \\ \widehat{AND} + \widehat{DMC} + \widehat{BC} &= 180^\circ \xrightarrow{\widehat{DMC} = 3^\circ} \widehat{AND} + \widehat{BC} = 150^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AND} = \frac{6^\circ + 150^\circ}{2} = \frac{156^\circ}{2} = 78^\circ$$

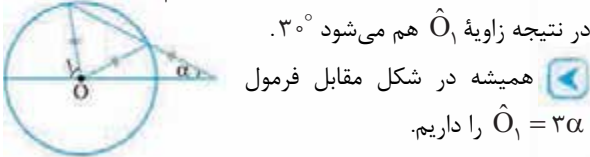
۶۰- گزینه ۲ این‌جا باید O را به A وصل کنیم تا چیزهای



زیادی گیرمان بیاید:

۱ مثلث AOM متساوی‌الساقین است:

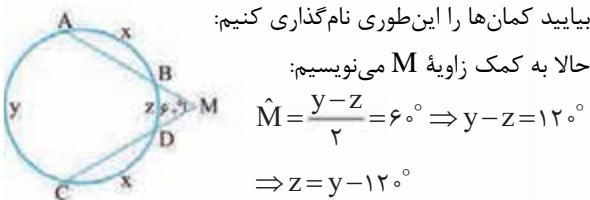
$$\begin{aligned} AM = AO = r &\Rightarrow \hat{O}_M = \hat{M} = 1^\circ \\ \widehat{AD} = \hat{O}_M = 1^\circ &\text{ زاویه مرکزی است، پس:} \\ \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} &\text{ زاویه M وتری خارجی است. پس:} \\ \Rightarrow 1^\circ = \frac{\widehat{BC} - 1^\circ}{2} &\Rightarrow \widehat{BC} = 3^\circ \end{aligned}$$



در نتیجه زاویه  $\hat{O}_1$  هم می‌شود  $3^\circ$ .

همیشه در شکل مقابل فرمول  $\hat{O}_1 = 3\alpha$  را داریم.

۶۱- گزینه ۲  $AB = CD$  است و این یعنی  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



بیاید کمان‌ها را این‌طوری نام‌گذاری کنیم:

$$\begin{aligned} \text{حالا به کمک زاویه M می‌نویسیم:} \\ \hat{M} = \frac{y - z}{2} = 6^\circ &\Rightarrow y - z = 12^\circ \\ \Rightarrow z = y - 12^\circ \end{aligned}$$

برویم سراغ همه کمان‌های دایره یعنی فرمول  $2x + y + z = 36^\circ$  پس  $2x + 2y = 48^\circ$  و این یعنی  $2x + y + y - 12^\circ = 36^\circ$  تست از ما کمان ACD را می‌خواهد که می‌شود  $x + y$  یعنی  $24^\circ$ .

۶۲- گزینه ۲ می‌دانیم اندازه زاویه بین دو مماس رسم‌شده

بر یک دایره، برابر با نصف تفاضل اندازه کمان‌های روبه‌رو آن است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BDC} + \widehat{BC} &= 36^\circ \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BDC} - \widehat{BC}}{2} &= 65^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BDC} - \widehat{BC} &= 130^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{36^\circ + 130^\circ}{2} = 83^\circ$$

۵۵- گزینه ۲ یک زاویه وتری داخلی و یک زاویه وتری

خارجی داریم. بیاید فرمول‌هایشان را بنویسیم:

$$\left\{ \begin{aligned} 55^\circ &= \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2} \\ \alpha &= \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right.$$

حالا به زاویه  $\hat{C} = 25^\circ$  نگاه کنید که به ما می‌گوید  $\widehat{AB} = 5^\circ$ .

$$55^\circ = \frac{\widehat{CD} + 5^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 6^\circ$$

پس:

$$\frac{6^\circ - 5^\circ}{2} = 5^\circ \text{ می‌شود می‌آید که می‌شود } 5^\circ$$

۵۶- گزینه ۲ قبل از هر چیز بیاید X را به دست بیاوریم

که کار راحتی است:  $2x + 4x + 3x + x = 36^\circ$  پس  $x = 36^\circ$ .

حالا راحت Y و Z به دست می‌آیند:

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{4x + x}{2} = \frac{5x}{2} = 9^\circ \\ z &= \frac{4x - x}{2} = \frac{3x}{2} = 54^\circ \end{aligned} \right.$$

تست از ما  $x + y + z$  را خواسته که می‌شود  $18^\circ$ .

۵۷- گزینه ۲ با توجه به این‌که اندازه کمان‌های ایجادشده

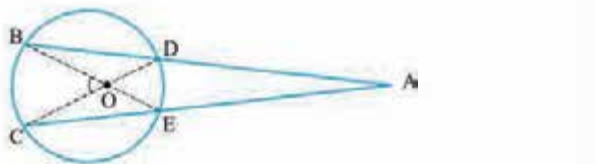
با هم برابر است، می‌توان گفت که اندازه هر یک از آن‌ها برابر

$$2^\circ = \frac{36^\circ}{18} \text{ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{AB} &= 4 \times \frac{36^\circ}{18} = 8^\circ \\ \widehat{CD} &= \frac{36^\circ}{18} = 2^\circ \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{2} = 3^\circ \end{aligned} \right.$$

۵۸- گزینه ۲ با توجه به روابط محاسبه زاویه بین دو وتر و

امتداد دو وتر خواهیم داشت:

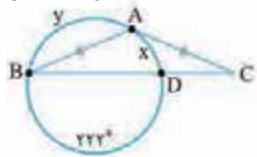


$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} &\Rightarrow 27^\circ = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{DE} = 54^\circ \\ \hat{O} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} &\Rightarrow 71^\circ = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{DE} = 142^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \widehat{BC} = \frac{142^\circ + 54^\circ}{2} = \frac{196^\circ}{2} = 98^\circ$$

با توجه به این که زاویه بین مماس و وتر، برابری نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{2\widehat{BT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

۶۷- **کرتبه** دقت کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین



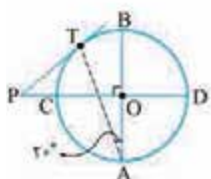
یعنی  $\hat{B} = \hat{C}$  است. پس:

$$\frac{y-x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 2x$$

از طرفی  $y + x = 138^\circ$  است. پس  $3x = 138^\circ$  یعنی  $x = 46^\circ$ . می‌شود. حالا سوال  $\hat{C}$  را خواسته که با  $\hat{B}$  برابر است و می‌شود  $\frac{x}{2} = 23^\circ$ .

۶۸- **کرتبه** می‌دانیم اندازه زاویه بین امتداد دو وتر، برابر با

نصف تفاضل کمان‌های روبه‌روی آن است. بنابراین داریم:



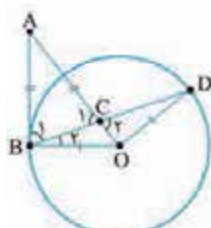
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BT}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 40^\circ$$

$$\widehat{BD} + \widehat{BT} + \widehat{CT} = 180^\circ$$

$$\frac{\widehat{BT}=40^\circ}{\widehat{BD}=\hat{O}=90^\circ} \rightarrow 90^\circ + 40^\circ + \widehat{CT} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CT} = 50^\circ$$

$$\hat{P} = \frac{\widehat{DT} - \widehat{CT}}{2} = \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 40^\circ$$

۶۹- **کرتبه** بیایید شکل سوال را بکشیم که این طوری می‌شود:



دایره بر ضلع AB عمود است و این

یعنی  $\hat{B}_1 + \hat{B}_2$  برابر  $90^\circ$  است. از طرفی

مثلث ABC متساوی‌الساقین است و این

یعنی  $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$  زوایای  $C_1$  و  $C_2$  هم که

متقابل به رأس هستند، پس  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ .

این‌ها را که کنار هم قرار دهیم می‌رسیم به  $\hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ$  حالا

برویم سراغ مثلث BOD که آن هم متساوی‌الساقین است (چرا؟)

در نتیجه  $\hat{B}_2 = \hat{D}$  بنابراین در نهایت  $\hat{D} + \hat{C}_2$  می‌شود  $90^\circ$  و این

یعنی مثلث OCD قائم‌الزاویه است.

۷۰- **کرتبه** مرکز دایره‌هایی که به شعاع ۲ بر خط  $d_1$

مماس هستند روی خط  $d_3$  و  $d_4$  می‌نشینند که موازی  $d_1$  و به

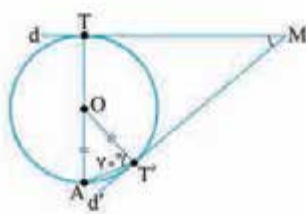
فاصله ۲ از آن هستند. حالا  $d_3$  و  $d_4$  در دو نقطه  $d_1$  را قطع

می‌کنند که مرکز همان دایره‌های

دلخواه ما هستند (نقاط O و O')



۶۳- **کرتبه** زاویه M را می‌خواهیم که به خاطر فرمولش می‌شود:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{TAT'} - \widehat{TT'}}{2}$$

حالا دوتا نکته:

۱ مثلث OAT' متساوی‌الساقین

(OA = OT') است و این یعنی  $\hat{A} = 7^\circ$ ، پس  $\widehat{TT'} = 14^\circ$ .

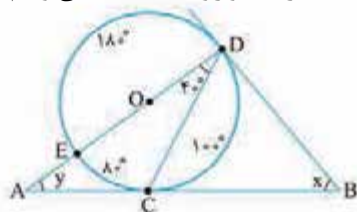
۲ کمان TAT' مساوی است با  $\widehat{TA} + \widehat{AT'}$ . کمان TA

که  $180^\circ - 14^\circ = 166^\circ$  است و کمان AT' می‌شود  $4^\circ - 14^\circ = 180^\circ$

در نتیجه  $\widehat{TAT'} = 22^\circ$ . بنابراین زاویه M برابر می‌شود با

$$\frac{22^\circ - 14^\circ}{2} = 4^\circ$$

۶۴- **کرتبه** با توجه به قطر DE و زاویه  $\hat{D} = 40^\circ$  می‌توانیم



کمان‌ها را این طوری عدد

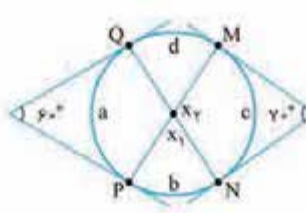
گذاری کنیم.

حالا x و y را می‌خواهیم:

$$\begin{cases} x = \frac{\widehat{DEC} - \widehat{DC}}{2} = \frac{26^\circ - 10^\circ}{2} = 8^\circ \\ y = \frac{\widehat{DC} - \widehat{EC}}{2} = \frac{10^\circ - 8^\circ}{2} = 1^\circ \end{cases} \Rightarrow x - y = 7^\circ$$

۶۵- **کرتبه** بیایید برای راحتی اندازه کمان‌ها را این طوری

بنویسیم و بعدش برویم سراغ فرمول‌ها:



$$\begin{cases} 1) x_1 = \frac{b+d}{2} \\ 2) 60^\circ = \frac{b+c+d-a}{2} \\ 3) 70^\circ = \frac{a+b+d-c}{2} \end{cases}$$

اگر رابطه ۲ و ۳ را جمع کنیم می‌رسیم به  $b+d = 130^\circ$  پس  $x_1$

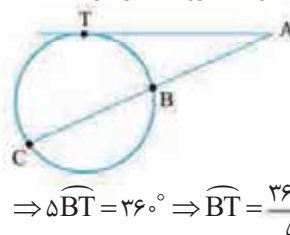
می‌شود  $65^\circ$  و  $x_2$  مکمل آن یعنی  $115^\circ$  است.

در این جور شکل‌ها  $x_1$  میانگین دو زاویه داده شده است.

$$\left( \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} \right) \text{ (این جا)}$$

۶۶- **کرتبه** ابتدا اندازه کمان‌های روی دایره را محاسبه

می‌کنیم:



$$\widehat{BT} + \widehat{BC} + \widehat{CT} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BT} + 2\widehat{BT} + 2\widehat{BT} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow 5\widehat{BT} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = \frac{36^\circ}{5} = 7.2^\circ$$

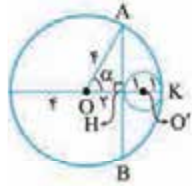
۷۶- **کریه** با توجه به این که مرکز دایره روی عمودمنصف

پاره خط AB واقع است و فقط یک دایره از این دو نقطه می گذرد، می توان نتیجه گرفت که مرکز آن نقطه O وسط AB می باشد؛ بنابراین داریم:

$$OB = OA = R = \frac{AB}{2} \Rightarrow 4m - 2 = 2 \Rightarrow m = 1$$

۷۷- **کریه** چون پاره خط AB بر دایره کوچک تر مماس

است، پس شعاع OH بر آن عمود است، در نتیجه در مثل قائم الزاویه AOH داریم:



$$\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\widehat{AK} = \widehat{BK} = 60^\circ$$

$$\widehat{AB} = 120^\circ$$

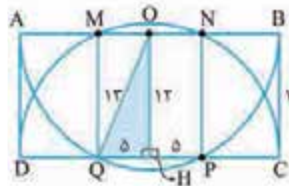
۷۸- **کریه** قطر نیم دایره برابر ۲۶ است، پس شعاع آن ها

۱۳ است، پس در مثل قائم الزاویه OHQ داریم:

$$OH = 12 \text{ (ضلع مستطیل)} \quad OH = 13 \text{ (شعاع دایره)} \quad OQ =$$

و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\Delta OHQ \text{ در: } HQ = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$



$$QP = 2 \times 5 = 10$$

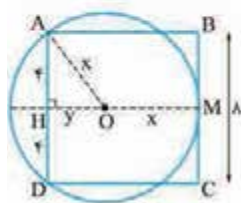
$$S_{MNPQ} = 10 \times 12 = 120$$

۷۹- **کریه** بیایید مرکز دایره را بگذاریم O. O را به A

وصل می کنیم و قطری که بر AD و BC عمود باشد را می کشیم. حالا با فیثاغورس در مثل AHO می رسمیم به:

$$AH^2 + OH^2 = AO^2 \Rightarrow 4^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 16}$$

قبول دارید که x + y می شود یک ضلع مربع؟ (به HM نگاه کنید)



$$\text{در نتیجه:}$$

$$x + \sqrt{x^2 - 16} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x$$

$$\Rightarrow x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2$$

$$\Rightarrow 16x = 80 \Rightarrow x = 5$$

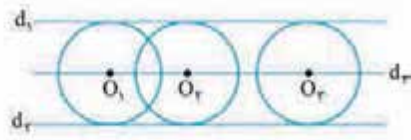
۸۰- **کریه** از نقطه O به A وصل می کنیم. با توجه به

این که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، داریم:

$$\Delta AOM: x \hat{A}M = \hat{A}_1 + \hat{A}_r$$

$$\hat{A}_1 = \hat{OAx} = 90^\circ \rightarrow 120^\circ = 90^\circ + \hat{A}_r \Rightarrow \hat{A}_r = 30^\circ$$

۷۱- **کریه** چه بگوییم بهتر از این شکل!



۷۲- **کریه** مرکز دایره ای که به هر دو خط d1 و d2 مماس

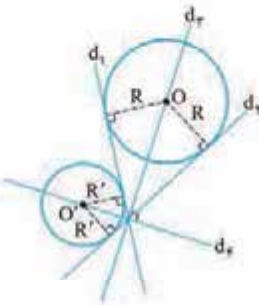
باشد از این دو خط به یک فاصله

است. پس مرکز چنین دایره ای باید

روی نیمساز زاویه های بین d1 و

d2 باشد. حواستان باشد که این دو

نیمساز بر هم عمودند (چرا؟)

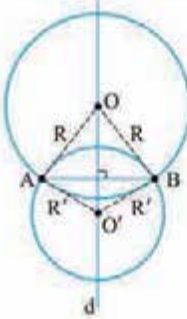


۷۳- **کریه** مرکز دایره ای که

از نقاط A و B عبور کند از این دو

نقطه به یک فاصله است. این یعنی روی

عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.



۷۴- **کریه** اگر نقطه ای مثل O پیدا

کنیم که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد

و سپس دایره ای به مرکز O و شعاع AO رسم

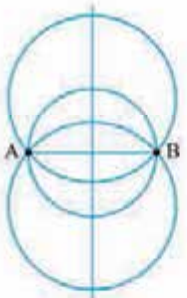
کنیم می رسمیم به دایره ای که از A و B می گذرد.

حالا چند نقطه داریم که از A و B به یک فاصله

باشند؟ بله، بی شمار نقطه روی عمودمنصف

پاره خط AB پیدا می شود. پس بی شمار دایره

پیدا می شود که از نقاط A و B عبور کند.



۷۵- **کریه** فرض کنیم نقاط A و B به فاصله ۵ هستند و

می خواهیم دایره ای بکشیم که از A و B عبور کند و شعاعش ۳

باشد. مرکز این دایره باید روی عمودمنصف پاره خط AB باشد

(چرا؟) پس این عمودمنصف را رسم می کنیم. حالا کمائی به شعاع ۳

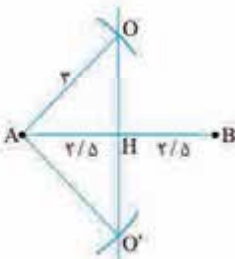
و مرکز A می زنیم تا عمودمنصف را در

نقاط O و O' قطع کند. این دو نقطه

همان مرکز دایره های ما هستند.

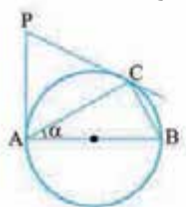
بنابراین دایره هایی به شعاع ۳ و مرکز

O و O' جواب این مسئله هستند.





**۸۴- گزینه ۳** عکس قضیه فیثاغورس برای مثلث ABC



برقرار است، می توان نتیجه گرفت:

$$\Delta ABC: AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{C} = \frac{AB}{2}} \widehat{AB} = 180^\circ$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \frac{BC}{2}} \widehat{BC} = 60^\circ$$

$$\widehat{AC} = 120^\circ \text{ و } \widehat{ABC} = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

پس: حال طبق رابطه محاسبه زاویه بین دو وتر خواهیم داشت:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow \hat{P} = \frac{240^\circ - 120^\circ}{2} = 60^\circ$$

**۸۵- گزینه ۳** از ظاهر شلوغ شکل نترسید. سؤال در واقع همه

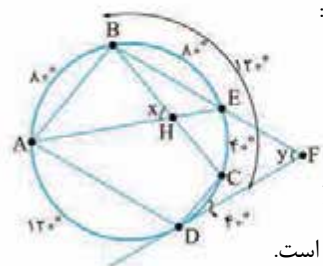
کمان ها را به ما داده! این طوری که  $\widehat{AB} = 80^\circ$  و  $\widehat{CD} = 40^\circ$ .

پس  $\widehat{AD} + \widehat{BC} = 240^\circ$ . حالا  $AB \parallel CD$  است که این یعنی

$\widehat{AD} = \widehat{BC} = 120^\circ$  هم موازی اند که نتیجه آن

می شود  $\widehat{AB} = \widehat{ED} = 80^\circ$  پس  $\widehat{EC} = 40^\circ$  و  $\widehat{BE} = 80^\circ$ . بیایید

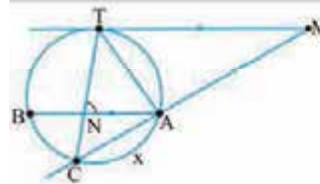
برویم سراغ زوایای خواسته شده:



$$x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CE}}{2} = 60^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{BAD} - \widehat{DCE}}{2} = 60^\circ$$

بنابراین  $x = y$  و  $x - y = 0$  است.



**۸۶- گزینه ۳** در یک

دایره کمان های محصور بین

یک وتر و مماس موازی با آن،

با هم برابرند.

$$AB \parallel TM \Rightarrow \widehat{BT} = \widehat{AT}$$

حال با توجه به روابط مربوط به محاسبه زاویه بین دو وتر و امتداد

$$\hat{M} = \frac{\widehat{CBT} - \widehat{AT}}{2}$$

$$\xrightarrow{\widehat{CBT} = \widehat{BC} + \widehat{BT}} 25^\circ = \frac{\widehat{BC} + \widehat{BT} - \widehat{AT}}{2}$$

$$\xrightarrow{\widehat{BT} = \widehat{AT}} 25^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ$$

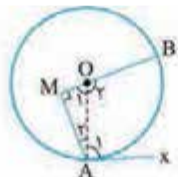
$$\hat{ANT} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AT}}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{50^\circ + \widehat{AT}}{2}$$

$$\Rightarrow 160^\circ = 50^\circ + \widehat{AT} \Rightarrow \widehat{AT} = 110^\circ$$

مجموع کمان های یک دایره برابر  $360^\circ$  می باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\widehat{AT} + \widehat{BT} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{BT} = \widehat{AT}} 110^\circ + 110^\circ + 50^\circ + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 90^\circ$$



$$\Delta AOM: \hat{O}_1 = 90^\circ - \hat{A}_1$$

$$= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

زاویه های  $O_1$  و  $O_2$  مجانب یکدیگرند. پس:

$$\hat{O}_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

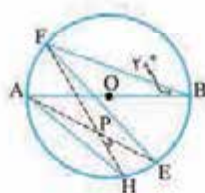
$\hat{O}_2 = \widehat{AB} = 120^\circ$  زاویه مرکزی است. در نتیجه:

$$\frac{AB}{360^\circ} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

**۸۱- گزینه ۳** در یک دایره، کمان های محصور بین دو وتر

موازی، با هم برابرند. بنابراین داریم:  $\hat{B} = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow \widehat{AF} = 40^\circ$

$$AH \parallel EF \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{HE} = 40^\circ$$



می دانیم اندازه بین دو وتر متقاطع، برابر

نصف مجموع اندازه کمان های مقابلش

است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{HPE} = \frac{\widehat{AF} + \widehat{HE}}{2} = \frac{40^\circ + 40^\circ}{2} = 40^\circ$$

**۸۲- گزینه ۳** از نقطه O مرکز دایره به نقاط A، B، C، D

وصل می کنیم. با توجه به شکل داریم:



$$\Delta OBD: OB = OD = BD$$

$$\Rightarrow \hat{BOD} = 60^\circ \xrightarrow{\widehat{BOD} = \widehat{BD}} \widehat{BD} = 60^\circ$$

$$\Delta OAC: \begin{cases} OA = OC = R \\ AC^2 = OA^2 + OC^2 \end{cases} \rightarrow AC = \sqrt{2}R$$

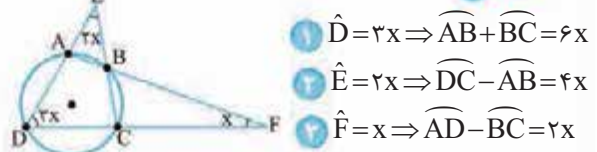
$$\hat{AOC} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{AOC} = \widehat{AC}} \widehat{AC} = 90^\circ$$

می دانیم اندازه زاویه بین امتداد دو وتر، برابر با نصف تفاضل کمان های

مقابلش است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$

**۸۳- گزینه ۳**



$$1) \hat{D} = 3x \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = 6x$$

$$2) \hat{E} = 2x \Rightarrow \widehat{DC} - \widehat{AB} = 4x$$

$$3) \hat{F} = x \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2x$$

حالا اگر سه رابطه را جمع بزنیم می رسیم به:

$$1) \widehat{AD} + \widehat{DC} = 12x$$

خب بیایید روابط ۱ و ۴ را جمع کنیم تا همه کمان های دایره جمع

شوند:

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow 18x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$