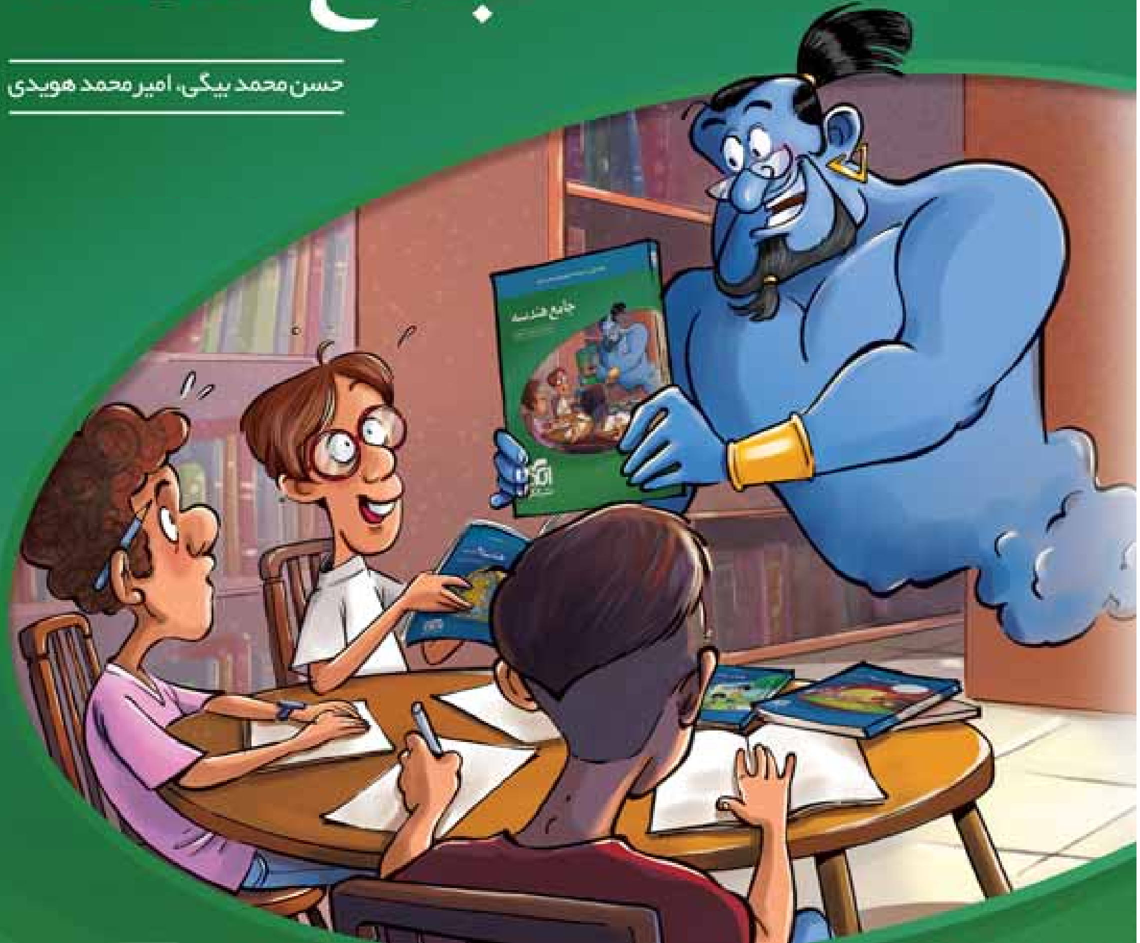
جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع هندسه

حسن محمد بیگی، امیرمحمد هویدی



نشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

با توجه به کنکورهای برگزار شده در دو سال اخیر در داخل و خارج کشور، اهمیت درس هندسه به‌وضوح از دید طراحان سؤال مشخص است. پس لازم است شما دانش‌آموزان عزیز و گرانقدر با تست‌های گوناگون هر سه درس هندسه ۱، ۲ و ۳ آشنا شوید.

هدف‌مان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب هندسه ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ را مرور کنید. این کتاب یازده فصل دارد. به‌جز فصل یازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل یازدهم ویژهٔ «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب هندسه ۳ را در سه فصل گنجانده‌ایم. هفت فصل دیگر مربوط به کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «ایستگاه یادگیری» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. همهٔ آزمون‌ها به‌جز آزمون‌های جامع کلی ده پرسش دارند. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همهٔ مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم.

پاسخ پرسش‌های ایستگاه یادگیری و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخهٔ چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را با اسکن QR Code پشت جلد کتاب یا از سایت انتشارات الگو دریافت کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل سوم: چندضلعی‌ها

فصل چهارم: تجسم فضایی

فصل پنجم: دایره

فصل ششم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل هفتم: روابط طولی در مثلث

فصل هشتم: ماتریس و کاربردها

فصل نهم: آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل هشتم

ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

تعریف هر آرایش مستطیل شکل از عددهای حقیقی، که شامل تعدادی سطر و ستون است، یک **ماتریس** است. به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس یک **«درایهٔ»** آن ماتریس می‌گوییم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A ،B ،C و ... نام‌گذاری می‌کنیم. مثال

$$A=\begin{bmatrix} ۱/۵ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲/۵ & -۱۰ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -۲۰ & ۴۰۰ \\ ۳/۵ & ۰ \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}$$

مرتبهٔ ماتریس

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریسی از **مرتبهٔ** $m\times n$ (بخوانید m در n) است.

توجه حاصل‌ضرب $m\times n$ تعداد درایه‌های ماتریس را نشان می‌دهد.

قرارداد اگر $m=n=۱$، آن‌گاه ماتریس $[k]_{۱\times۱}$ را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم.

ماتریس‌های هم‌مرتبه

اگر تعداد سطرهای دو ماتریس با هم و تعداد ستون‌های آن دو ماتریس نیز با هم برابر باشند، آن دو ماتریس را **هم‌مرتبه** می‌گوییم.

نمایش کلی درایه‌ها

در ماتریس دلخواه A ، درایهٔ واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهیم.

نتیجه در حالت کلی، ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اغلب ماتریس بالا را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ $(۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n)$ می‌نویسیم. به a_{ij} **درایهٔ عمومی** ماتریس A می‌گوییم.

تست ۱ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$، مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) ۸   ۲) ۱۳   ۳) ۱۵   ۴) ۱۷

راه‌حل با توجه به اطلاعات سؤال ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ است. بنابراین

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس A}=۷-۲+۵+۷=۱۷$$

تست ۲ مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=[i^۲+۳j]_{۳\times۳}$ کدام است؟

۱) ۲۸   ۲) ۲۹   ۳) ۳۱   ۴) ۳۲

راه‌حل کافی است درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به‌دست آوریم: $a_{۱۲}=۱+۶=۷\,,\quad a_{۲۲}=۴+۶=۱۰\,,\quad a_{۳۲}=۹+۶=۱۵$

اکنون به‌دست می‌آید $\text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}=۷+۱۰+۱۵=۳۲$

تست ۳ اگر $A_{۳\times۲}=[ij-۲]$ و $B_{۳\times۳}=[(i-j)^۲+۱]$، **مقدار** $۳a_{۲۱}b_{۱۲}-a_{۳۲}b_{۳۱}$ **کدام است؟**

۱) -۵۸ ۲) -۱۰ ۳) -۱۴ ۴) -۲۰

راه‌حل به‌دست می‌آید $a_{۲۱}=۲\times۱-۲=۰$، $a_{۳۲}=۳\times۲-۲=۴$، $b_{۱۲}=(۱-۲)^۲+۱=۲$ و $b_{۳۱}=(۳-۱)^۲+۱=۵$. اکنون به‌دست می‌آید

$$۳a_{۲۱}b_{۱۲}-a_{۳۲}b_{۳۱}=۳\times۰\times۲-۴\times۵=-۲۰$$

تست ۴ اگر A، B، C و D **به‌ترتیب ماتریس‌هایی با مرتبه‌های** ۱×۳، ۳×۲، ۲×۳ و ۳×۱ **باشند، کدام ماتریس زیر از مرتبه** ۳×۳ **نیست؟**

۱) $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} A & D \end{bmatrix}$

راه‌حل تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \end{bmatrix}$

گزینهٔ (۲): $\begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & d_{۱۱} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & d_{۲۱} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & d_{۳۱} \end{bmatrix}$

گزینهٔ (۳): $\begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \\ a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \end{bmatrix}$

گزینهٔ (۴): $\begin{bmatrix} A & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & & d_{۱۱} \\ a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & d_{۲۱} \\ & & & d_{۳۱} \end{bmatrix}$ چنین ماتریسی وجود ندارد.

معرفی چند ماتریس خاص

۱- **ماتریس صفر** ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر هستند. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

مثال:

$$\bar{O}=[۰]_{۱\times۱}=۰,\quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳},\quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۲- **ماتریس سطری** ماتریسی است که یک سطر دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس سطری به صورت $۱\times n$ است.

مثال: ماتریس‌های مقابل سطری‌اند.

$$A=[۴]_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times۳},\quad C=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & \pi & \sqrt{۲} \end{bmatrix}_{۱\times۴}$$

۳- **ماتریس ستونی** ماتریسی است که یک ستون دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس ستونی به صورت $m\times۱$ است.

مثال: ماتریس‌های مقابل ستونی‌اند.

$$A=[-۱]_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱},\quad C=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}_{۵\times۱}$$

۴- ماتریس مربعی ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

توجه ۱- اگر یک ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، به جای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$، می‌گوییم «ماتریس مربعی از مرتبهٔ n».

۲- در ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ درایه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} i=j \Rightarrow & a_{ij} \text{ روی قطر اصلی است} \\ i<j \Rightarrow & a_{ij} \text{ بالای قطر اصلی است} \\ i>j \Rightarrow & a_{ij} \text{ پایین قطر اصلی است} \\ i+j=n+1 \Rightarrow & a_{ij} \text{ روی قطر فرعی است} \end{cases}$$

مثال: ماتریس‌های زیر مربعی‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix}_{1\times 1},\quad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}_{2\times 2},\quad C=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

۵- ماتریس قطری ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر هستند. به عبارت دیگر،

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس قطری است $\Leftrightarrow (i\neq j \Rightarrow a_{ij}=۰)$

توجه در ماتریس قطری درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

مثال: ماتریس‌های زیر قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix}_{1\times 1},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{2\times 2},\quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{2\times 2},\quad D=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{3\times 3},\quad E=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

۶- ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

مثال: ماتریس‌های زیر اسکالر هستند.

$$A=\begin{bmatrix} -۶ \end{bmatrix}_{1\times 1},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{2\times 2},\quad C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

۷- ماتریس همانی (واحد) ماتریس اسکالری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ هستند. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n یا به‌طور خلاصه با I نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $\delta_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$، آن‌گاه $I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$.

مثال: ماتریس‌های زیر همانی‌اند.

$$I_1=\begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}_{1\times 1},\quad I_2=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{2\times 2},\quad I_3=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

تست ۵ **در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ می‌دانیم $a_{ij}=3ij-2i$. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟**

۱) ۲۹   ۲) ۱۷   ۳) ۳۰   ۴) ۲۸

راه‌حل درایه‌های روی قطر اصلی را به‌دست می‌آوریم $a_{11}=3-2=1$، $a_{22}=12-4=8$ و $a_{33}=27-6=21$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس } A = a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+8+21=30$$

تست ۶

به ازای چند مقدار x ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & x^۳-۱ & ۲ \\ ۰ & ۵ & x^۲-۱ \\ ۳ & x^۲-x & ۰ \end{bmatrix}$ **یک ماتریس قطری است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل در ماتریس قطری باید درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر باشند:

$$x^۳-۱=۰\Rightarrow x=۱,\quad x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱,\quad x^۲-x=۰\Rightarrow x=۰, x=۱$$

اشتراک جواب‌های بالا $x=۱$ است، پس به ازای یک مقدار x این ماتریس قطری است.

تست ۷

اگر $A=[a_{ij}]_{(۳n)\times(۳n-۲)}$ **یک ماتریس ستونی باشد و** $a_{ij}=ij+nj^۲$**، مقدار** $a_{۳۱}$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) این درایه وجود ندارد.

راه‌حل چون این ماتریس ستونی است، پس مرتبهٔ آن برابر $m\times۱$ است. یعنی $۳n-۲=۱$، پس $n=۱$. در نتیجه A ماتریسی از مرتبهٔ ۳×۱ است و $a_{ij}=ij+j^۲$. اکنون به‌دست می‌آید $a_{۳۱}=۳\times۱+۱=۴$.

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس A و B **مساوی** هستند، اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) ماتریس‌های A و B هم‌مرتبه باشند.

۲) درایه‌های ماتریس‌های A و B نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

به عبارت دیگر، دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ مساوی هستند اگر

۱) $m=p$ و $n=q$. ۲) به‌ازای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$.

در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

تست ۸

اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲x-y \\ ۱ & z \end{bmatrix}$**،** $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ **و** $A=B$**، حاصل** $x+y+z$ **کدام است؟**

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل چون $A=B$، پس

$$\begin{cases} ۲x+y=۵ \\ ۲x-y=۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۲ \\ y=۱ \end{cases},\quad z=-۲$$

اکنون به‌دست می‌آید $x+y+z=۲+۱-۲=۱$.

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر را با هم جمع یا از هم کم کنیم. به عبارت دیگر، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، آن‌گاه

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}\ ,\quad A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

تست ۹

اگر $\begin{bmatrix} i \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & m-۱ \\ n & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i^۲+۲j \end{bmatrix}$**، مقدار** $۲m-n$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۸ ۴) ۱۲

راه‌حل برابری داده شده را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-۱ & ۴ \\ ۴ & n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m & ۵ \\ ۶ & n+۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} m=۳ \\ n+۲=۸ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=۳ \\ n=۶ \end{cases}\Rightarrow ۲m-n=۶-۶=۰$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$، یعنی rA، یک ماتریس هم‌مرتبه با ماتریس A است، به طوری که اگر $rA=[d_{ij}]_{m\times n}$، آن‌گاه $d_{ij}=ra_{ij}$، یعنی هر درایهٔ ماتریس rA از ضرب درایهٔ نظیرش در ماتریس A در عدد حقیقی r به‌دست می‌آید.

قرینهٔ یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. **قرینهٔ** A ماتریسی $m\times n$ است که از ضرب عدد -1 در ماتریس A به دست می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A=(-1)A$.

نکته — خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،
۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،
۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)،
۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)،
۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$،
۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$،
۷) $(rs)A=r(sA)$،
۸) $1A=A$،
۹) $0A=\bar{O}$ و $r\bar{O}=\bar{O}$،
۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq 0$، آن‌گاه $A=B$
۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

تست ۱۰

اگر $A=[2i-j]_{2\times 2}$، $B=[4i+3j]_{2\times 2}$، $X+Y=A$ و $X-Y=B$، مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۵۲

راه‌حل

ابتدا ماتریس $2X+Y$ را برحسب ماتریس‌های A و B به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}X+Y=A\\X-Y=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{A+B}{2}\\Y=\dfrac{A-B}{2}\end{cases}\Rightarrow 2X+Y=A+B+\frac{A-B}{2}\qquad(1)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+B=[2i-j]_{2\times 2}+[4i+3j]_{2\times 2}=[6i+2j]_{2\times 2}\quad(2),\qquad A-B=[2i-j]_{2\times 2}-[4i+3j]_{2\times 2}=[-2i-4j]_{2\times 2}\quad(3)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $2X+Y=[6i+2j]_{2\times 2}+[-i-2j]_{2\times 2}=[5i]_{2\times 2}=\begin{bmatrix}5&5\\10&10\end{bmatrix}$. بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ برابر $5+5+10+10=30$ است.

ضرب ماتریس‌ها

ضرب ماتریس A در B (ماتریس A از سمت چپ در ماتریس B ضرب شده است) را به صورت AB نشان می‌دهیم.

نکته — شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس و مرتبهٔ ماتریس AB

۱- ضرب AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد.
۲- اگر A ماتریس $m\times n$ و B ماتریس $n\times p$ باشد، آن‌گاه $C=AB$ از مرتبهٔ $m\times p$ است، یعنی $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$.

تست ۱۱

اگر $A=[a_{ij}]_{4\times 2}$، $B=[b_{ij}]_{2\times 4}$ و $C=[c_{ij}]_{4\times 4}$، کدام گزینه قابل تعریف نیست؟

۱) $AB+C$ ۲) BCA ۳) $ABC+C$ ۴) $BC+2A$

راه‌حل تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): AB از مرتبهٔ ۴×۴ است و هم مرتبه با C است، پس $AB+C$ قابل تعریف است.

گزینهٔ (۲): BC از مرتبهٔ ۲×۴ است و در نتیجه BCA از مرتبهٔ ۲×۲ است و تعریف می‌شود.

گزینهٔ (۳): AB از مرتبهٔ ۴×۴ است و ABC از مرتبهٔ ۴×۴ است و هم‌مرتبه با C است، پس $ABC+C$ قابل تعریف است.

گزینهٔ (۴): BC از مرتبهٔ ۲×۴ است و هم‌مرتبه با A نیست، پس $BC+۲A$ تعریف نمی‌شود.

تست ۱۲ اگر A از مرتبهٔ $(n+۱)\times(۳p+۱)$، B از مرتبهٔ $(n+۲)\times m$ و AB از مرتبهٔ $۳\times(p+۱)$ باشد، مقدار $m+n+p$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل چون AB از مرتبهٔ $۳\times(p+۱)$ است، پس $n+۱=۳$ و $m=p+۱$. همچنین، چون AB تعریف می‌شود، پس $۳p+۱=n+۲$ از این برابری‌ها $n=۲$، $m=۲$ و $p=۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین $m+n+p=۲+۲+۱=۵$.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}_{۱\times n}$ و $B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times ۱}$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$AB=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}$$

نتیجه از برابری بالا می‌توان برای $A_{۱\times n}$ و $B_{n\times ۱}$، $A\times B$ را به‌صورت $A\times B=\sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}b_{k۱}$ نوشت.

تست ۱۳ اگر $A=\begin{bmatrix} m & -۳ & ۲\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۳m+۱\end{bmatrix}$ و $AB=۷$، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) ۱۱

راه‌حل بنابر تعریف،

$$A\times B=\begin{bmatrix} m & -۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۳m+۱\end{bmatrix}=۵m-۶+۶m+۲=۱۱m-۴$$

بنابر فرض مسئله $A\times B=۷$. در نتیجه $۱۱m-۴=۷\Rightarrow m=۱$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، آن‌گاه $A\times B$ ماتریسی مانند $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ است که در آن درایهٔ c_{ij} برابر است با ضرب سطر i ام A در ستون j ام B:

$$c_{ij}=[A \text{ سطر } i \text{ ام}]\times[B \text{ ستون } j \text{ ام}]=\begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

نتیجه با توجه به مطلب قبل می‌توان درایهٔ واقع در سطر i ام و ستون j ام $C=A\times B$ را به‌صورت $c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}$ نوشت.

تست ۱۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ، x مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB و y مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

راه‌حل درایه‌های روی قطر اصلی AB و BA را به‌دست می‌آوریم:

$$BA=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶+۳ & \\ & -۲-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & \\ & -۴ \end{bmatrix},\quad AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶-۲ & \\ & ۳-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & \\ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $x=۴+۱=۵$ و $y=۹-۴=۵$. در نتیجه $\frac{x}{y}=\frac{۵}{۵}=۱$.

تذکر می‌توان ثابت کرد که در حالت کلی برای دو ماتریس مربعی مرتبهٔ دو A و B مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس‌های AB و BA با هم برابرند.

تست ۱۵ اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ n & -۱ \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، مقدار $m+۳n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix} m & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ n & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲m+۲n & m-۲ \\ -۲+۳n & -۴ \end{bmatrix}$$

چون این ماتریس قطری است، پس

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ -۲+۳n=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=۲ \\ n=\frac{۲}{۳} \end{cases}\Rightarrow m+۳n=۲+۲=۴$$

تست ۱۶ در تساوی $\begin{bmatrix} y+۵ \\ -۳x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & ۳ \\ ۴ & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ، مقدار $۳x+y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۵

راه‌حل ابتدا حاصل‌ضرب سمت چپ تساوی داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \\ ۴ & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x+۶ \\ -۴+۲y \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} -x+۶ \\ -۴+۲y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+۵ \\ -۳x \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -x+۶=y+۵ \\ -۴+۲y=-۳x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=۱ \\ ۳x+۲y=۴ \end{cases}\Rightarrow x=۲\ ,\ y=-۱$$

بنابراین $۳x+y=۳(۲)-۱=۵$.

تست ۱۷ اگر $[c_{ij}]=[i-j]_{۳\times۲}\times[۲i+j]_{۲\times۳}$ ، مقدار $c_{۳۲}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۴ ۴) ۲۱

راه‌حل با فرض $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ ، $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ ، $b_{ij}=۲i+j$ به‌دست می‌آید

$$c_{۳۲}=(\text{سطر سوم ماتریس }A)(\text{ستون دوم ماتریس }B)=\begin{bmatrix} a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۲} \\ b_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix}=۸+۶=۱۴$$

تست ۱۸

اگر $A\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}A$ **و درایه‌های ماتریس A عددهای طبیعی باشند، کمترین مقدار مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، به طوری که a، b، c و d اعدادی طبیعی باشند. بنابر فرض سؤال،

$$A\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}A\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2b&a\\c+2d&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\2a&2b\end{bmatrix}$$

درایه‌های نظیر این دو ماتریس برابرند. بنابراین $a+2b=a+c\Rightarrow c=2b\ ,\quad a=b+d$

پس $A=\begin{bmatrix}b+d&b\\2b&d\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های آن $4b+2d$ است. چون b و d اعداد طبیعی هستند، پس کمترین مقدار $4b+2d$ به‌ازای $b=d=1$ به‌دست می‌آید که برابر ۶ است.

تست ۱۹

ماتریس‌های $A=[i]_{3\times3}$ **و** $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ **مفروض‌اند. اگر مجموع درایه‌های ستون اول و سوم ماتریس B روی هم برابر ۵ و مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر ۴۲ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس B کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۷

راه‌حل از تعریف ماتریس A به‌دست می‌آید $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$. فرض می‌کنیم $B=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$. در نتیجه

$$AB=\begin{bmatrix}a+d+g&b+e+h&c+f+i\\2(a+d+g)&2(b+e+h)&2(c+f+i)\\3(a+d+g)&3(b+e+h)&3(c+f+i)\end{bmatrix}$$

بنابر فرض مسئله، مجموع درایه‌های AB برابر ۴۲ است. مجموع درایه‌های ستون دوم B را x فرض می‌کنیم. اکنون با توجه به اینکه مجموع درایه‌های ستون اول و سوم ماتریس B روی هم برابر ۵ است، به‌دست می‌آید $6\times5+6x=42$. در نتیجه $x=2$.

توان در ماتریس‌ها

فرض کنید A ماتریسی مربعی باشد. توان‌های A را به صورت $A^2=AA$، $A^3=AA^2$، ... و $A^n=AA^{n-1}$ ($n>1$ و $n\in\mathbb{N}$) تعریف می‌کنیم.

تست ۲۰

ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ **به‌صورت** $a_{ij}=\begin{cases}0&i=j\\1&i\neq j\end{cases}$ **تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس** A^2-A **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

راه‌حل درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم، در این صورت $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$. اکنون به‌دست می‌آید

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

در نتیجه، $A^2-A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=2I\Rightarrow$ مجموع درایه‌های A^2-A = مجموع درایه‌های $2I$ = ۶

تست ۲۱

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۴} & ۱ & \frac{۱}{۳} & ۲ \end{bmatrix}$ ، و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & -۳ \\ ۵ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ، **مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^۲$ کدام است؟**

۱) ۱۳ **۲)** ۱۲ **۳)** ۱۶ **۴)** ۴

راه‌حل ماتریس C برابر است با

$$C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۴} & ۱ & \frac{۱}{۳} & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ & -۳ \\ ۵ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

پس لازم است قطر اصلی $C^۲$ را به‌دست آوریم

$$C^۲=C\times C=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۴} & ۱ & \frac{۱}{۳} & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ & -۳ \\ ۵ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۴} & ۱ & \frac{۱}{۳} & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ & -۳ \\ ۵ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ? & ? & ? \\ ? & ۴ & ? & ? \\ ? & ? & ۴ & ? \\ ? & ? & ? & ۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^۲$ برابر ۱۶=۴+۴+۴+۴ است.

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی تساوی $AB=BA$ در حالت کلی درست نیست.

تذکر عدم برقراری خاصیت جابه‌جایی در ضرب ماتریس‌ها باعث می‌شود خواصی که در عبارت‌های جبری وجود دارد، در ماتریس‌ها برقرار نباشد. به‌عنوان مثال $(AB)^۲$ را نباید بنویسیم $A^۲B^۲$ ، بلکه می‌نویسیم $(AB)^۲=ABAB$.

نکته

۱- ماتریس‌های به‌صورت $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ **با هم جابه‌جایی دارند.**

۲- ماتریس‌های به‌صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ **با هم جابه‌جایی دارند.**

۳- ماتریس همانی I_n ، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ n است و با آن‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

توجه: اگر A ماتریس غیرمربعی از مرتبهٔ $m\times n$ باشد، برابری بالا به‌صورت مقابل است: $A_{m\times n}\times I_n=I_m\times A_{m\times n}=A_{m\times n}$

نتیجه برای هر ماتریس همانیِ I و عدد طبیعی k ، $I^k=I$.

نکته

ماتریس اسکالر A با هر ماتریس دلخواه و هم‌مرتبه با آن مانند B جابه‌جا می‌شود و برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب کافی است عدد روی قطر اصلی A را در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب کنیم: $(A=rI\ ,\ A$ هم‌مرتبه با $B)\Rightarrow AB=BA=rB$

نتیجه

برای به توان رساندن یک ماتریس اسکالر، کافی است درایه‌های قطر اصلی آن را به توان برسانیم:

$$\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} r^n & 0 & 0 \\ 0 & r^n & 0 \\ 0 & 0 & r^n \end{bmatrix}$$

نکته

ماتریس قطری A با ماتریس دلخواه و هم‌مرتبه با آن مانند B در حالت کلی جابه‌جایی ندارد، اما ماتریس‌های قطری هم‌مرتبه جابه‌جایی دارند و حاصل‌ضرب آن‌ها یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن از ضرب نظیربه‌نظیر درایه‌های این دو ماتریس به‌دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1s_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2s_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3s_3 \end{bmatrix}$$

نتیجه

برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های قطر اصلی آن را به توان برسانیم.

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} r_1^n & 0 & 0 \\ 0 & r_2^n & 0 \\ 0 & 0 & r_3^n \end{bmatrix}$$

تست ۲۲

برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} a & 3 \\ b & 2 \end{bmatrix}$، **اگر** $AB-BA=\bar{O}$، **حاصل** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۳   ۲) ۱−   ۳) ۱   ۴) ۵

راه‌حل بنابر فرض، ماتریس‌های A و B با هم جابه‌جایی دارند. چون ماتریس A به‌صورت $\begin{bmatrix} -b & a \\ a & b \end{bmatrix}$ است، پس اگر B هم به همین صورت باشد، آن‌گاه ماتریس‌های A و B باهم جابه‌جایی دارند. در نتیجه در ماتریس B درایه‌های قطر اصلی را با هم برابر و درایه‌های قطر فرعی را قرینهٔ یکدیگر در نظر می‌گیریم. پس $b=3$ و $a=-2$، یعنی $a+b=1$.

ویژگی ۲ (خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها): برای سه ماتریس A، B و C خاصیت شرکت‌پذیری، یعنی $A(BC)=(AB)C$ برقرار است.
توجه کنید که باید ضرب‌های ماتریسی این تساوی قابل تعریف باشند.

تست ۲۳

اگر $AB=A$ **و** $BA=B$، **ماتریس** A^{20} **کدام است؟**

۱) A ۲) B ۳) I ۴) $\bar{O}$

راه‌حل بنابر فرض‌های سؤال $A^2=A\times A=(AB)A=A(BA)=AB=A$. چون $A^2=A$، می‌توان نتیجه گرفت A به هر توانی برسد خودش می‌شود، در واقع $A^3=A\times A^2=A\times A=A^2=A\,,\ \ A^4=A\times A^3=A\times A=A^2=A$

پس $A^{20}=A$.

تست ۲۴

اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **و** $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، **درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس** $D=ABC$ **کدام است؟**

۱) ۵   ۲) ۵−   ۳) صفر   ۴) ۳

راه‌حل ابتدا AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&0\\0&0\end{bmatrix}$$

اکنون توجه کنید که

$$ABC=(AB)C=\begin{bmatrix}-5&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&5\\0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین درایهٔ سطر اول و ستون دوم ABC برابر ۵ است.

توجه می‌توان با استفاده از نکتهٔ بعد این مسئله را به روش کوتاه‌تری حل کرد.

نکته

اگر $ABC=D$، برای پیدا کردن درایهٔ سطر i ام و ستون j ام ماتریس D به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

d_{ij}=(سطر i ام ماتریس A)B(ستون j ام ماتریس C)

تست ۲۵

اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$ **، درایهٔ واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۲

راه‌حل با توجه به نکتهٔ قبل

درایهٔ سطردوم و ستون سوم ماتریس A^3=(سطر دوم A)A(ستون سوم A)

$$=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}=4+2+0=6$$

تست ۲۶

اگر $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ **،** $B=\begin{bmatrix}2&-1&3\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ **،** $C=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&x&x\\x&-1&1\end{bmatrix}$ **و** $D=[d_{ij}]=ABC$ **، به ازای کدام مقدار x تساوی $d_{23}=d_{32}$ برقرار است؟**

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) صفر

راه‌حل d_{23} و d_{32} را محاسبه می‌کنیم.

$$d_{23}=\begin{bmatrix}2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&3\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\1\end{bmatrix}=3-3x+6=9-3x$$

$$d_{32}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&3\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\-1\end{bmatrix}=4+x-4=x$$

از برابری $d_{23}=d_{32}$ نتیجه می‌گیریم $9-3x=x$، یعنی $x=\frac{9}{4}$.

تست ۲۷

برای دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ به نام‌های A و B، اگر $۳AB+BA=\bar{O}$ و $AB^{۳}=kB^{۳}A$، عدد k کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲۷}$ ۲) ۲۷ ۳) ۲۷- ۴) $\frac{۱}{۲۷}$

راه‌حل از برابری $۳AB+BA=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم

$$AB=(-\frac{۱}{۳})BA \quad (۱)$$

این تساوی را از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$AB^{۲}=(-\frac{۱}{۳})BAB \xrightarrow{(۱)} AB^{۲}=(-\frac{۱}{۳})B(-\frac{۱}{۳}BA)=\frac{۱}{۹}B^{۲}A$$

مجدداً این تساوی را از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$AB^{۳}=\frac{۱}{۹}B^{۲}AB \xrightarrow{(۱)} AB^{۳}=\frac{۱}{۹}B^{۲}(-\frac{۱}{۳}BA)=-\frac{۱}{۲۷}B^{۳}A$$

اکنون با مقایسهٔ $AB^{۳}=-\frac{۱}{۲۷}B^{۳}A$ و $AB^{۳}=kB^{۳}A$ به‌دست می‌آید $k=-\frac{۱}{۲۷}$.

ویژگی ۳ (خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی ضرب نسبت به جمع): اگر $A_{m\times p}$، $B_{p\times n}$ و $C_{p\times n}$ سه ماتریس باشند ضرب ماتریس A در مجموع B+C خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد، یعنی

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

همچنین، اگر $A_{m\times p}$، $B_{m\times p}$ و $C_{p\times n}$ سه ماتریس باشند، آن‌گاه $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$.

نتیجه **عمل فاکتورگیری در ماتریس‌ها**

اگر بخواهیم در یک عبارتِ ماتریسی از یک ماتریس فاکتور بگیریم، حتماً باید ماتریس مورد نظر در همهٔ عبارت‌ها از یک طرف ضرب شده باشد.

مثال:

$AB+AC=A(B+C)$ ، $AC+BC=(A+B)C$ ، $AB+BC$ (در این عبارت نمی‌توان از B فاکتور گرفت)

$AB+۲A=A(B+۲I)$ ، $BA+۳A=(B+۳I)A$

تست ۲۸

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند. $AB=A$ و $BA=B$، حاصل $A(A-B)^{۲}B$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $۴(A-B)$ ۳) ۴A ۴) ۴B

راه‌حل بنابر فرض‌های $AB=A$ و $BA=B$ ثابت می‌کنیم $A^{۲}=A$:

$$AB=A \xrightarrow{\times A} ABA=A^{۲} \xrightarrow{BA=B} AB=A^{۲} \xrightarrow{AB=A} A=A^{۲}$$

به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد $B=B^{۲}$. بنابراین

$$A(A-B)^{۲}B=A(A-B)(A-B)B=(A^{۲}-AB)(AB-B^{۲})=\underbrace{(A-A)}_{\bar{O}}(A-B)=\bar{O}(A-B)=\bar{O}$$

تست ۲۹

اگر $A=[۳i-۲j]_{۳\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳&۰&۰\\۰&-۳&۰\\۰&۰&-۳\end{bmatrix}$، حاصل $BA+۳A$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $-A$ ۳) ۲A ۴) $\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\۰&-۱&۱\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$

راه‌حل از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $B=-۳I$. در عبارت $BA+۳A$ از سمت راست از A فاکتور می‌گیریم، در این صورت

$$BA+۳A=(B+۳I)A=(-۳I+۳I)A=\bar{O}A=\bar{O}$$

تذکر ماتریس صفر $(\bar{O})$ در هر ماتریس ضرب شود (به شرط قابل تعریف بودن ضرب)، حاصل آن ماتریس صفر $(\bar{O})$ است.

تست ۳۰

اگر $\begin{bmatrix}۳&۲\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}۲&-۱\end{bmatrix}$ **و** $\begin{bmatrix}۵&-۱\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}۳&۴\end{bmatrix}$، **حاصل** $\begin{bmatrix}۸&۱\end{bmatrix}A$ **کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix}۶&-۴\end{bmatrix}$ **۲)** $\begin{bmatrix}۵&۳\end{bmatrix}$ **۳)** $\begin{bmatrix}۷&-۲\end{bmatrix}$ **۴)** $\begin{bmatrix}۶&۶\end{bmatrix}$

راه‌حل طرفین دو برابری داده شده را با هم جمع می‌کنیم $\begin{bmatrix}۳&۲\end{bmatrix}A+\begin{bmatrix}۵&-۱\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}۲&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۴\end{bmatrix}$. از سمت راست از A فاکتور می‌گیریم:

$$\left(\begin{bmatrix}۳&۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵&-۱\end{bmatrix}\right)A=\begin{bmatrix}۵&۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۸&۱\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}۵&۳\end{bmatrix}$$

تست ۳۱

A **و** B **دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ هستند،** $AB=\begin{bmatrix}-۲&m+۲\\۰&n-۴\end{bmatrix}$ **و** $\begin{bmatrix}-۲&۳\\۰&۱\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}۳&-۲\\۲&۱\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-۲&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}B$. **مقدار** $m+n$ **کدام است؟**

۱) صفر **۲)** ۶ **۳)** ۲ **۴)** ۴

راه‌حل در عبارت داده شده، از سمت چپ از A و از سمت راست از B فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix}۳&-۲\\۲&۱\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-۲&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}۳&-۲\\۲&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}\right)B=A\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}B=AIB=AB$$

اکنون نتیجه می‌گیریم

$$\begin{bmatrix}-۲&m+۲\\۰&n-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&۳\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}m+۲=۳\\n-۴=۱\end{cases}$$

یعنی $m=۱$ و $n=۵$. بنابراین $m+n=۶$.

ویژگی ۴ (بررسی قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها): می‌توان دو طرف یک برابری ماتریسی را (در صورت قابل تعریف بودن ضرب) در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد. فقط دقت کنید جهت ضرب شدن مهم است:

$$B=C\begin{cases}\xrightarrow{A\times}AB=AC\\[2ex]\xrightarrow[\times A]{}BA=CA\end{cases}$$

تذکر دقت کنید که عکس این مطلب درست نیست، یعنی نمی‌توان از دو طرفِ یک برابری ماتریسی، ماتریس خاصی را حذف کرد. به عبارت دیگر، اگر $AB=AC$، نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

نتیجه اگر $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$، نتیجه می‌گیریم $AB=\bar{O}$. اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست، یعنی اگر $AB=\bar{O}$، نمی‌توان نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$.

برابری کیلی – همیلتون

بحث را با یک تست شروع می‌کنیم:

تست ۳۲

اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۲\end{bmatrix}$ **و** $A^{۲}=\alpha A+\beta I$، **حاصل** $۲\alpha+\beta$ **کدام است؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** -۴ **۴)** ۱۵

راه‌حل ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۴\\۱۲&۱\end{bmatrix}$$

از برابری $A^{۲}=\alpha A+\beta I$ به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix}۱&-۴\\۱۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\alpha&-\alpha\\۳\alpha&۲\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&۰\\۰&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\alpha+\beta&-\alpha\\۳\alpha&۲\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

بنابراین $۲\alpha+\beta=۱$.

می‌توان مسئلهٔ قبل را با قضیهٔ زیر که معروف به قضیهٔ کیلی - همیلتون است، ساده‌تر و کوتاه‌تر حل کرد:

قضیه ۱ **قضیهٔ کیلی - همیلتون**

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I$

اکنون تست قبل را با استفاده از قضیهٔ کیلی - همیلتون به‌صورت زیر حل می‌کنیم. بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون،

$$A^2=(2+2)A-(4+3)I=4A-7I$$

با مقایسهٔ این برابری با برابری $A^2=\alpha A+\beta I$ به‌دست می‌آید $\alpha=4$ و $\beta=-7$. در نتیجه $2\alpha+\beta=8-7=1$.

تست ۳۳ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^3=mA+nI$، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) -4 ۲) ۵   ۳) ۷   ۴) ۳

راه‌حل بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون، $A^2=(1+1)A-(1-2)I=2A+I$. دو طرف این برابری را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^3=2A^2+A=2(2A+I)+A=5A+2I$$

با مقایسهٔ این برابری با $A^3=mA+nI$ به‌دست می‌آید $m=5$ و $n=2$. در نتیجه $m+n=7$.

بررسی اتحادها در ماتریس‌ها

در حالت کلی اتحادهای جبری برای ماتریس‌ها برقرار نیست.

مثال:

$$\begin{cases}(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2\\(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2\\(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\end{cases}$$

نکته اگر دو ماتریس A و B جابه‌جا شونده باشند $(AB=BA)$، آن‌گاه اتحادها برای این ماتریس‌ها برقرار است.

مثال: اگر $AB=BA$، آن‌گاه

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2\ ,\quad (A-B)^2=A^2-2AB+B^2\ ,\quad (A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

تذکر چون $AI=IA$، پس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش در اتحادها صدق می‌کند:

$$(A-I)(A^2+A+I)=A^3-I\ ,\quad (A+I)(A-I)=A^2-I\ ,\quad (A\pm I)^2=A^2\pm 2A+I$$

$$(A-I)^3=A^3-3A^2+3A-I\ ,\quad (A+I)^3=A^3+3A^2+3A+I\ ,\quad (A+I)(A^2-A+I)=A^3+I$$

تست ۳۴ اگر $A^2=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، ماتریس $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

راه‌حل می‌دانیم $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$، پس

$$AB+BA=(A+B)^2-A^2-B^2=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

تست ۳۵

اگر $A^3=I-2A$، حاصل $(A^2+I)^2$ کدام است؟

۱) A ۲) $A+I$ ۳) $A-I$ ۴) $-A$

راه‌حل دو طرف برابری $A^3=I-2A$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^4=A-2A^2 \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$(A^2+I)^2=A^4+2A^2+I \xrightarrow{(1)} (A^2+I)^2=(A-2A^2)+2A^2+I=A+I$$

تست ۳۶

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$، در ماتریس $(A+I)(A-I)$ درایهٔ سطر دوم و ستون دوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

اکنون بنابر اتحادها می‌توان نوشت

$$(A+I)(A-I)=A^2-I^2=A^2-I=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

بنابراین درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(A+I)(A-I)$ برابر صفر است.

تست ۳۷

اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد و $A^2=I$، $B=A+I$ و $C=A-I$، ماتریس B^2+C^2 کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) I ۳) $2I$ ۴) $4I$

راه‌حل با قرار دادن $B=A+I$ و $C=A-I$ در عبارت B^2+C^2 به‌دست می‌آید

$$B^2+C^2=(A+I)^2+(A-I)^2=A^2+2A+I+A^2-2A+I=2A^2+2I$$

چون $A^2=I$، پس $B^2+C^2=2I+2I=4I$.

توان‌های بالای یک ماتریس مربعی

گاهی یک ماتریس را به ما می‌دهند و می‌خواهند که توان‌هایی از آن را به‌دست آوریم. برای حل این مسئله‌ها ماتریس را به توان ۲، ۳ و ... می‌رسانیم، تا جایی که قانونی به‌دست آوریم که محاسبهٔ توانِ خواسته شده امکان‌پذیر باشد (البته گاهی این ماتریس‌ها از قانون خاصی پیروی نمی‌کنند).

تست ۳۸

اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$، حاصل $A^{1400}-A^{1399}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$ ۲) $\bar{O}$ ۳) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

راه‌حل توجه کنید که $A^2=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=I$. با ضرب طرفین این برابری در ماتریس A به‌دست می‌آید $A^3=A$. به همین صورت، مجدداً دو طرف را در A ضرب می‌کنیم $A^4=A^2=I$. در نتیجه اگر n زوج باشد، (فرض کنید $n=2k$، که k عددی طبیعی است)، آن‌گاه

$$A^n=A^{2k}=(A^2)^k=I^k=I$$

و اگر n فرد باشد (فرض کنید $n=2k+1$، که k عددی طبیعی است)، آن‌گاه

$$A^n=A^{2k+1}=A(A^2)^k=A(I)^k=A$$

پس
$$A^n=\begin{cases} I & \text{زوج باشد } n \\ A & \text{فرد باشد } n \end{cases}.$$

بنابراین

$$A^{1399}-A^{1400}=A-I=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

نتیجه اگر $A^2=I$، آن‌گاه
$$A^n=\begin{cases} I & \text{طبیعی و زوج باشد } n \\ A & \text{طبیعی و فرد باشد } n \end{cases}$$

تست ۳۹

اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$، **مجموع درایه‌های ماتریس A^5 چقدر است؟**

۱) -3^7 ۲) 3^7 ۳) -3^6 ۴) 3^6

راه‌حل ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}=-3A$$

دو طرف برابری $A^2=-3A$ را در A ضرب می‌کنیم $A^3=-3A^2=-3(-3A)=(-3)^2A$. بنابراین می‌توان ثابت کرد به ازای هر عدد طبیعی n، $A^n=(-3)^{n-1}A$. در نتیجه

$$A^5=(-3)^4A=81A=\begin{bmatrix} -81 & -81 & -81 \\ -81 & -81 & -81 \\ -81 & -81 & -81 \end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید $-3^6=(-81)\times 9=$مجموع درایه‌های ماتریس A^5.

نتیجه اگر $A^2=kA$، آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی n، $A^n=k^{n-1}A$.

تست ۴۰

اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، **حاصل $A^{1399}+A^{1398}$ کدام است؟**

۱) $\bar{O}$ ۲) $A-I$ ۳) $A+I$ ۴) A^3+A

راه‌حل ابتدا A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{\times A}A^3=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی $A^3=\bar{O}$. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت به ازای هر عدد طبیعی n که $n\geq 3$، $A^n=\bar{O}$. در نتیجه

$$A^{1399}+A^{1398}=\bar{O}+\bar{O}=\bar{O}$$

نتیجه برای ماتریس مربعی A اگر به‌ازای عدد طبیعی k، $A^k=\bar{O}$، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n که $n\geq k$ به‌دست می‌آید $A^n=\bar{O}$.

تست ۴۱

اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های A^{100} کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۹ ۴) 9^{100}

راه‌حل ابتدا A^2 را پیدا می‌کنیم $A^2=\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=A$. طرفین برابری $A^2=A$ را در A ضرب می‌کنیم، بنابراین $A^3=A^2=A$. پس A به هر توانی برسد، خودش می‌شود، یعنی $A^{100}=A=\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. در نتیجه ۹-=۱۰-۱=مجموع درایه‌های A^{100}.

نکته

برای ماتریس مربعی A، اگر $A^2=A$، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n به‌دست می‌آید $A^n=A$.

تست ۴۲

اگر $A=\begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}$، حاصل $A^{30}+A^{20}+A^{10}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) 3I ۳) -I ۴) -3I

راه‌حل می‌دانیم $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$. بنابراین

$$A^2=\begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tan^2 x-\frac{1}{\cos^2 x} & 0 \\ 0 & \tan^2 x-\frac{1}{\cos^2 x} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \tan^2 x-1-\tan^2 x & 0 \\ 0 & \tan^2 x-1-\tan^2 x \end{bmatrix}=-I$$

در نتیجه $A^{10}=(A^2)^5=(-I)^5=-I$ ، $A^{20}=(A^2)^{10}=(-I)^{10}=I$ و $A^{30}=(A^2)^{15}=(-I)^{15}=-I$. پس

$$A^{30}+A^{20}+A^{10}=-I+I-I=-I$$

تست ۴۳

اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس A^{1400} کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱۳۵۷

راه‌حل ابتدا A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

دو طرف تساوی بالا را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^3=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

مجدداً دو طرف این برابری را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^4=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب برای هر عدد طبیعی n،

$$A^n=\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ۲=مجموع درایه‌های A^n، پس ۲=مجموع درایه‌های A^{1400}.

تست ۴۴

اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر ۱۴۰۰ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۳۹۶ ۲) ۱۳۹۷ ۳) ۱۳۹۸ ۴) ۱۳۹۹

راه‌حل

ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را به‌دست می‌آوریم و از روی آن‌ها ماتریس A^n را حدس می‌زنیم $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ثابت می‌شود برای هر عدد طبیعی n، $A^n=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ که مجموع درایه‌های آن برابر $n+2$ است. بنابر فرض مسئله $n+2=1400$، در نتیجه $n=1398$.

ایستگاه یادگیری

۵۳۴- درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^2+2j & i\geq j \\ 2j-i & i<j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۵۳۵- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times4}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 7 & i=j \\ i^2-1 & i<j \end{cases}$ مفروض است. مقدار $2a_{24}-3a_{31}+4a_{33}$ برابر کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۵۳۶- مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی $A=[n-2ij]_{(6-n)\times(2n)}$ برابر کدام است؟

۱) -50 ۲) -51 ۳) -52 ۴) -53

۵۳۷- ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، a_{ij} در کدام گزینه به‌درستی تعریف شده است؟

۱) $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ 4 & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$
۲) $a_{ij}=\begin{cases} j-1 & i<j \\ 4 & i=j \\ i+1 & i>j \end{cases}$
۳) $a_{ij}=\begin{cases} i-1 & i<j \\ 4 & i=j \\ j+1 & i>j \end{cases}$
۴) $a_{ij}=\begin{cases} j-i & i<j \\ 4 & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$

۵۳۸- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $\frac{x}{2}-y+2z$ برابر کدام است؟

۱) -2 ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) -4

۵۳۹- اگر $A=[2ij-1]_{3\times3}$ و $B=[i^2-3j]_{3\times3}$، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $2A-B$ برابر کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۵۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $mA-nB=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$، زوج مرتب (m,n) کدام است؟

۱) $(-3,-2)$
۲) $(3,2)$
۳) $(2,3)$
۴) چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

۵۴۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ ، $B=[b_{ij}]_{۴\times۳}$ و $C=[c_{ij}]_{۳\times۵}$ ، کدام ضرب قابل تعریف است؟

۱) AB ۲) CB ۳) AC ۴) BA

۵۴۲- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $AB-BA$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$

۵۴۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & k \end{bmatrix}$ ، به‌ازای چند مقدار k تساوی ماتریسی $A^۲+۲A-I=\bar{O}$ درست است؟

۱) صفر ۲) نامتناهی ۳) ۱ ۴) ۲

۵۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ a & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ b & a & ۲ \\ ۳ & ۴ & -۵ \end{bmatrix}$ ، $C=AB=[c_{ij}]$ ، $c_{۲۱}=۱۶$ و $c_{۲۲}=۰$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) -۱۱

۵۴۵- دو ماتریس $A=[i-۲j]_{۲\times۳}$ و $B=[۲i+j]_{۱\times۳}$ مفروض‌اند. اگر $C=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $C^۲$ برابر کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۶ ۳) ۵۷ ۴) ۵۸

۵۴۶- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} -۲ & b & -۱ \\ ۲ & ۱ & -a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & -۲ \\ ۱ & a \\ ۲b & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر AB ماتریسی قطری باشد، حاصل $a^۲-۳b$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۲

۵۴۷- اگر $A=\begin{bmatrix} x+z & x-۲y \\ ۲y+۳ & y \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری و $A^۲$ ماتریسی اسکالر باشد، کمترین مقدار $x+y+z$ برابر کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۸ ۳) -۹ ۴) -۳

۵۴۸- معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۱ & -۱ \\ ۲ & -x & ۱ \\ ۱ & -۲ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ x \end{bmatrix}=۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۴۹- ماتریس‌های $A_{۵\times۲}$ ، $B_{k\times۵}$ و $C_{p\times q}$ را درنظر بگیرید. اگر ماتریس $(۲AC)^۳-۳B$ قابل تعریف باشد، مقدار pqk برابر کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۵ ۳) ۵۰ ۴) ۳۰

۵۵۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، درایهٔ سطر سوم و ستون اول ماتریس CAB برابر کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۳

۵۵۱- اگر بدانیم $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۶ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ ، درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۵۲- اگر $A^{۲}=۲A+I$ و $A^{۵}=\alpha A+\beta I$، مقدار $\alpha-۲\beta$ برابر کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۷ ۴) ۵

۵۵۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۲۰}$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۵۵۴- ماتریس $A=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۱۶۸}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۵۵۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱+\tan^{۲}\alpha & ۰ \\ ۰ & \cos^{۲}\alpha \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۷}+A^{۸}$ کدام است؟

۱) $۲A$ ۲) I ۳) $A+I$ ۴) A

۵۵۶- ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۰ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۵۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۵۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱ \\ ۱ & ۵۵ \end{bmatrix}$

۵۵۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۷}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۳۲

۵۵۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱۳۹۸ & ۱۳۹۹ & ۰ \\ ۱۳۹۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، حاصل $(A^{۴}-I)(I+A^{۳})$ برابر کدام است؟

۱) $A^{۱۳۹۹}+I$ ۲) $A^{۷}+۲I$ ۳) $A^{۱۴۰۰}-I$ ۴) $I-A$

۵۵۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ & ۳ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۱۲}$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) $A^{۲}$ ۳) $\bar{O}$ ۴) I

۵۶۰- اگر $A^{۲}=A-I$، ماتریس $A^{۲۰۰}$ برابر کدام است؟

۱) $۲A^{۲}$ ۲) $I-A$ ۳) $A-I$ ۴) A

۵۶۱- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و رابطهٔ $\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}=A^{۵}\begin{bmatrix} ۶ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}A^{۴}$ برقرار باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) -۴

۵۶۲- اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ دو باشند به‌طوری که $AB=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $B\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۵۶۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I_2$، دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(11,2)$
۲) $(2,13)$
۳) $(4,11)$
۴) $(4,13)$

۵۶۴- اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^3=\alpha A+\beta I$، مقدار $\alpha+\beta$ چقدر است؟

۱) -9
۲) -8
۳) 8
۴) 9

۵۶۵- اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، $A^2=A$ و $2A-B=I$، ماتریس B^2-I برابر کدام است؟

۱) I
۲) $2I$
۳) A
۴) $\bar{O}$

۵۶۶- ماتریس‌های A ، B و C مربعی هم‌مرتبه هستند و $AB=C$. حاصل $A(BA)^5B$ برابر کدام است؟

۱) BC^5A
۲) C^5
۳) C^6
۴) AC^5B

۵۶۷- A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اند. اگر $BA+mAB=\bar{O}$، ماتریس AB^2 کدام است؟ (m عدد حقیقی و ناصفر است)

۱) $\frac{1}{m^2}B^2A$
۲) $-\frac{1}{m^2}B^2A$
۳) $\frac{1}{m}B^2A$
۴) $-\frac{1}{m}B^2A$

۵۶۸- اگر $A^2+4A=\bar{O}$، حاصل $(A+3I)(-4A-2I)$ برابر کدام است؟

۱) $10A+6I$
۲) $2A-6I$
۳) $10A-6I$
۴) $-2A+6I$

آزمون ۴۸ — ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۱)

محل انجام محاسبات

۴۷۱- ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ به‌صورت $A=[i^{3}+j^{3}+ij]$ تعریف شده است. اگر x مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی و y مجموع درایه‌های پایین قطر اصلیِ این ماتریس باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۷۲- با توجه به دستگاه ماتریسی زیر، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

$$2A+3B=\begin{bmatrix}2&5\\-1&4\end{bmatrix},\quad 3A-2B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-2\end{bmatrix}$$

۱) $\frac{9}{13}$ ۲) $\frac{2}{13}$ ۳) $\frac{5}{13}$ ۴) $\frac{7}{13}$

۴۷۳- اگر $A=\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}$ و $2A-B=I$، مجموع درایه‌های ماتریس B برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۷۴- اگر درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix}$ برابر ۵۵ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۵۰

۴۷۵- اگر $A=\begin{bmatrix}2m+n&-2\\p+3&t-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5&m-n\\-t&p+2\end{bmatrix}$ دو ماتریس مساوی باشند، حاصل $2m-n+p+3t$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) -4 ۳) ۲ ۴) -6

۴۷۶- ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&1\\-1&a\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. اگر مجموع درایه‌های ماتریس A^{2} برابر صفر باشد، حاصل‌جمع مقادیر ممکن برابر a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

۴۷۷- ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&3\\-1&-1\end{bmatrix}$ در تساوی $A^{6}=kA$ صدق می‌کند. k برابر کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۲۴

۴۷۸- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&x\\2&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&y\\3&1\end{bmatrix}$ در تساوی $(A-B)(A+B)=A^{2}-B^{2}$ صدق می‌کنند. مقدار $\frac{y}{x}$ کدام است؟ $(x\neq 0)$

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۴۷۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$ و $A^{3}=\alpha A+\beta I_{2}$، مقدار $\alpha-\beta$ برابر کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۶ ۳) ۱۱ ۴) صفر

۴۸۰- اگر $A^{2}-A+I=\bar{O}$، ماتریس A^{400} برابر کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $-I$ ۴) I

آزمون ۴۹ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۲)

محل انجام محاسبات

۴۸۱- اگر $[i]_{2\times2}+\begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix}=[i^2-3j]_{2\times2}$، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) -5 ۳) -7 ۴) صفر

۴۸۲- اگر $A=[i-j]_{2\times2}$، $B=[i+j]_{2\times2}$ و ماتریس‌های X و Y جواب‌های دستگاه $\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

۴۸۳- اگر ضرب ماتریسی $A_{2\times3}(B_{m\times n}C_{3\times5})$ تعریف شده باشد، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۸

۴۸۴- اگر $A=\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -1 & b & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$، $C=AB=[c_{ij}]$، به‌طوری که $c_{13}=-2$ و $c_{22}=0$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) ۶ ۴) ۵

۴۸۵- اگر $A=\begin{bmatrix} 120 & 144 \\ -100 & -120 \end{bmatrix}$، ماتریس A^{1399} کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $4A$

۴۸۶- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A+I)^6=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

۴۸۷- اگر $A^2=A$ و $B^2=B-I$، حاصل A^3+B^3 چقدر است؟

۱) $B-I$ ۲) $A+B-I$ ۳) $A+B$ ۴) $A-I$

۴۸۸- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^4=\alpha A+\beta I$، مقدار $\alpha+\beta$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) -2 ۴) ۲

۴۸۹- A ماتریسی مربعی است به‌طوری که $A^2+A=-I$. حاصل A^{1398} کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\bar{O}$ ۴) $-A$

۴۹۰- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و به‌ازای عدد طبیعی n، مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر ۱۰۲۴ باشد، مقدار n کدام است؟

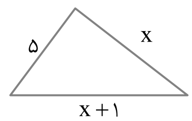
۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵۳۲ **(۳)** مساحت مثلث را با استفاده از قضیهٔ هرون به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۵+x+x+۱}{۲}=x+۳$$
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$
$$=\sqrt{(x+۳)(x+۳-۵)(x+۳-x)(x+۳-x-۱)}$$
$$=\sqrt{(x+۳)(x-۲)(۳)(۲)}=\sqrt{۶(x^{۲}+x-۶)}$$

بنابر فرض سؤال $S=۶\sqrt{۶}$، پس

$$\sqrt{۶(x^{۲}+x-۶)}=۶\sqrt{۶}\Rightarrow x^{۲}+x-۴۲=۰$$
$$(x+۷)(x-۶)=۰\xrightarrow{x>۰}x=۶$$

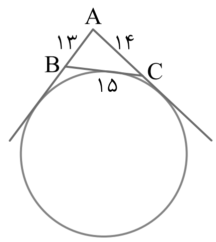


۵۳۳ **(۱)** شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC (بزرگ‌ترین ضلع در شکل زیر) از رابطهٔ $r_a=\frac{S}{P-a}$ به‌دست می‌آید.

مساحت مثلث ABC را با استفاده از قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$$
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$
$$=\sqrt{۲۱\times ۸\times ۷\times ۶}=\sqrt{۲۱\times ۲۱\times ۱۶}=۲۱\times ۴=۸۴$$

بنابراین $r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۸۴}{۲۱-۱۵}=\frac{۸۴}{۶}=۱۴$.



۵۳۴ **(۴)** ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۳,\quad a_{۱۲}=۳,\quad a_{۱۳}=۵$$
$$a_{۲۱}=۶,\quad a_{۲۲}=۸,\quad a_{۲۳}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}$. اکنون به‌دست می‌آید

مجموع درایه‌های ماتریس A $=۳+۳+۵+۶+۸+۴=۲۹$

۵۳۵ **(۱)** با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A،

$$a_{۲۴}=۲^{۲}-۱=۳,\quad a_{۳۱}=۳+۱=۴,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین $۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}=۲(۳)-۳(۴)+۴(۷)=۲۲$.

۵۳۶ **(۳)** ماتریس A مربعی از مرتبهٔ $(۶-n)\times(۲n)$ است، پس

$$۶-n=۲n\Rightarrow ۳n=۶\Rightarrow n=۲$$

پس $A=[۲-۲ij]_{۴\times۴}$. بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی آن به‌صورت زیر هستند.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ? & ? & ? \\ ? & -۶ & ? & ? \\ ? & ? & -۱۶ & ? \\ ? & ? & ? & -۳۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A برابر $۰-۶-۱۶-۳۰=-۵۲$ است.

۵۳۷ **(۴)** در گزینهٔ (۱)، درایهٔ $a_{۱۲}$ برابر $۱-۲=-۱$ است، پس این گزینه درست نیست. در گزینهٔ (۲)، درایهٔ $a_{۲۳}$ برابر $۳-۱=۲$ است، پس این گزینه هم درست نیست. در گزینهٔ (۳)، درایهٔ $a_{۱۲}$ برابر $۱-۱=۰$ است، پس این گزینه هم درست نیست. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۵۳۸ **(۴)** دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند. چون $A=B$، پس

$$z-۱=-۳\Rightarrow z=-۲,\quad \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \end{cases}\Rightarrow ۲x=۱۲\Rightarrow x=۶\Rightarrow y=۳$$

بنابراین $\frac{x}{۲}-y+۲z=\frac{۶}{۲}-۳-۴=-۴$.

۵۳۹ **(۴)** درایه‌های این دو ماتریس را تعیین می‌کنیم:

$$A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}$$
$$B=[i^{۲}-۳j]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۶ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $۲A-B=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۶ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$. فقط ستون دوم ماتریس $۲A-B$ را لازم داریم، پس $۲A-B=\begin{bmatrix} ? & ۱۱ & ? \\ ? & ۱۶ & ? \\ ? & ۱۹ & ? \end{bmatrix}$.

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر است با
$۱۱+۱۶+۱۹=۴۶$

۵۴۰ **(۴)** ماتریس‌های A و B را در معادلهٔ زیر قرار می‌دهیم:

$$mA-nB=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow m\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}-n\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} -n & -۲m \\ m+n & ۲m-۳n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} -n=-۳\Rightarrow n=۳ \\ -۲m=-۴\Rightarrow m=۲ \\ m+n=۵ \\ ۲m-۳n=۰ \end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به‌دست آمده در معادلهٔ چهارم صدق نمی‌کنند، پس $m=۲$ و $n=۳$ قابل‌قبول نیست.

۵۴۱ **(۳)** ضرب دو ماتریس در صورتی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست برابر باشد. در اینجا ماتریس A ماتریسی 2×3 و ماتریس C ماتریسی 3×5 است، پس ماتریس AC قابل تعریف و از مرتبهٔ 2×5 است. سایر گزینه‌ها این ویژگی را ندارند و ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست.

۵۴۲ **(۳)** ابتدا ماتریس‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\4&4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-14\\1&2\end{bmatrix}$$

بنابراین $AB-BA=\begin{bmatrix}1&-4\\4&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-14\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&10\\3&2\end{bmatrix}$.

۵۴۳ **(۳)** **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1-k\\2+2k&-2+k^2\end{bmatrix}$$

چون $A^2+2A-I=\overline{O}$، پس

$$\begin{bmatrix}-1&-1-k\\2+2k&-2+k^2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\overline{O}$$

$$\begin{bmatrix}0&-k-3\\2k+6&k^2+2k-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-k-3=0\Rightarrow k=-3\\2k+6=0\Rightarrow k=-3\\k^2+2k-3=0\Rightarrow(k+3)(k-1)=0\Rightarrow k=-3 \text{ یا } k=1\end{cases}$$

بنابراین $k=-3$ که در هر سه معادله صدق می‌کند، قابل قبول است. پس به‌ازای یک مقدار k تساوی ماتریسی داده شده برقرار است.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون،

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=(k+1)A-(k+2)I$$

طبق فرض $A^2=I-2A$، بنابراین $(k+1)A-(k+2)I=I-2A$. در نتیجه

$$\begin{cases}k+1=-2\Rightarrow k=-3\\-(k+2)=1\Rightarrow k=-3\end{cases}$$

پس فقط یک مقدار برای k به دست می‌آید.

۵۴۴ **(۱)** چون $c_{21}=16$، پس $\begin{bmatrix}a&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\\3\end{bmatrix}=a+2b+6=16$

یعنی $a+2b=10$. همچنین از $c_{22}=0$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}a&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\a\\4\end{bmatrix}=-a+2a+8=0$$

پس $a=-8$ و از برابری $a+2b=10$ به‌دست می‌آید $-8+2b=10$، یعنی $b=9$. بنابراین $a-b=-8-9=-17$.

۵۴۵ **(۳)** ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{11}=1-2=-1,\quad a_{12}=1-4=-3,\quad a_{13}=1-6=-5$$

$$a_{21}=2-2=0,\quad a_{22}=2-4=-2,\quad a_{23}=2-6=-4$$

پس $A=\begin{bmatrix}-1&-3&-5\\0&-2&-4\end{bmatrix}$. از طرف دیگر، $b_{11}=2+1=3$، $b_{12}=2+2=4$ و $b_{13}=2+3=5$. پس $B=\begin{bmatrix}3&4&5\end{bmatrix}$. بنابراین

$$C=\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&5\\-1&-3&-5\\0&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}3&4&5\\-1&-3&-5\\0&-2&-4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&4&5\\-1&-3&-5\\0&-2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-10&-25\\0&15&30\\2&14&26\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس C^2 برابر است با

$$5-10-25+15+30+2+14+26=57$$

۵۴۶ **(۱)** ابتدا ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}-2&b&-1\\2&1&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&-2\\1&a\\2b&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a-b&1+ab\\2a+1-2ab&-4-2a\end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطری اصلی صفر هستند، پس

$$\begin{cases}1+ab=0\Rightarrow ab=-1 \quad (1)\\2a+1-2ab=0\Rightarrow 2a+1+2=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{از }(1)}b=\frac{2}{3}\end{cases}$$

بنابراین $a^2-3b=(-\frac{3}{2})^2-3(\frac{2}{3})=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$.

۵۴۷ **(۴)** در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، پس

$$2y+3=0\Rightarrow y=-\frac{3}{2},\quad x-2y=0\Rightarrow x=2y\xrightarrow{y=-\frac{3}{2}}x=-3$$

پس $A=\begin{bmatrix}-3+z&0\\0&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$. اکنون ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-3+z&0\\0&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3+z&0\\0&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3+z)^2&0\\0&\frac{9}{4}\end{bmatrix}$$

چون A^2 اسکالر است، پس درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر هستند. پس

$$(-3+z)^2=\frac{9}{4}\Rightarrow -3+z=\pm\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}-3+z=\frac{3}{2}\Rightarrow z=\frac{9}{2}\\-3+z=-\frac{3}{2}\Rightarrow z=\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس کمترین مقدار $x+y+z$ به ازای $z=\frac{3}{2}$ به‌دست می‌آید:

$$x+y+z=-3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=-3$$

۵۴۸ **۲** ضرب ماتریس‌ها را به‌ترتیب پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۰\end{bmatrix}_{۱\times۳}\begin{bmatrix}x&۱&-۱\\ ۲&-x&۱\\ ۱&-۲&x\end{bmatrix}_{۳\times۳}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ x\end{bmatrix}_{۳\times۱}=۰$$

$$\begin{bmatrix}۲x-۲ & x+۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ x\end{bmatrix}=۰\Rightarrow ۲x-۲+۲x+۴-۳x=۰\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۵۴۹ **۳** چون A از مرتبهٔ ۲×۵ و C از مرتبهٔ $p\times q$ است، پس AC از مرتبهٔ $۵\times q$ است و $p=۲$. برای اینکه $(۲AC)^{۳}$ قابل تعریف باشد، باید $q=۵$. همچنین $(۲AC)^{۳}$ از مرتبهٔ ۵×۵ باید با ماتریس $۳B$ قابل تفریق شدن باشد، پس باید ماتریس‌های $(۲AC)^{۳}$ و $۳B$ هم‌مرتبه باشند، یعنی $۵\times۵=k\times۵$ بنابراین $k=۵$. در نتیجه $pqk=۲\times۵\times۵=۵۰$.

۵۵۰ **۳** برای به‌دست آوردن این درایه به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

(ستون اول B)A(سطر سوم C)=درایهٔ سطر سوم و ستون اول ماتریس CAB

$$=\begin{bmatrix}۰&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱&۱\\ ۰&۱&۳\\ ۱&۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۱۰$$

۵۵۱ **۱** برای به‌دست آوردن درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۳&-۱\end{bmatrix}}_{\text{(سطر دوم B)}}\underbrace{\begin{bmatrix}۲&۱&-۱&۳\\ ۰&۶&۱&۲\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}۴\\ -۱\\ ۲\\ -۲\end{bmatrix}}_{\text{(ستون دوم B)}}$$

$$=\begin{bmatrix}۶&-۳&-۴&۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ -۱\\ ۲\\ -۲\end{bmatrix}=۲۴+۳-۸-۱۴=۵$$

۵۵۲ **۴** ابتدا طرفین تساوی $A^{۲}=۲A+I$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^{۲}=۲A+I\Rightarrow A^{۴}=(۲A+I)^{۲}\Rightarrow A^{۴}=۴A^{۲}+I+۴A$$

$$A^{۴}=۴(۲A+I)+I+۴A\Rightarrow A^{۴}=۱۲A+۵I\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در A ضرب}}$$

$$A^{۵}=۱۲A^{۲}+۵A\Rightarrow A^{۵}=۱۲(۲A+I)+۵A\Rightarrow A^{۵}=۲۹A+۱۲I$$

بنابراین $\alpha=۲۹$ و $\beta=۱۲$، پس $\alpha-۲\beta=۲۹-۲۴=۵$.

۵۵۳ **۲** توجه کنید که

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}-۲&۳\\ -۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&۳\\ -۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۳\\ ۱&-۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۱&-۳\\ ۱&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&۳\\ -۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=I$$

اکنون می‌توانیم ماتریس $A^{۲۰}$ را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$A^{۲۰}=(A^{۳})^{۶}\times A^{۲}=I^{۶}\times A^{۲}=A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&-۳\\ ۱&-۲\end{bmatrix}$$

۵۵۴ **۳** ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲}&-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}&\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲}&-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}&\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}$$

چون $A^{۲}$ ماتریس خاصی نیست، ماتریس $A^{۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۰&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲}&-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}&\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}&-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}&-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$$

ماتریس $A^{۳}$ نیز کمکی برای پیدا کردن توان‌های بالای A نمی‌کند، پس $A^{۴}$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\ ۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

بنابراین برای پیدا کردن $A^{۱۶۸}$ آن را برحسب $A^{۴}$ می‌نویسیم:

$$A^{۱۶۸}=(A^{۴})^{۴۲}=(-I)^{۴۲}=I$$

۵۵۵ **۳** می‌دانیم $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$. پس

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۱+\tan^{۲}\alpha\\ \cos^{۲}\alpha&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱+\tan^{۲}\alpha\\ \cos^{۲}\alpha&۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۰&\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\\ \cos^{۲}\alpha&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\\ \cos^{۲}\alpha&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۸}=(A^{۲})^{۴}=I^{۴}=I$ و $A^{۷}=(A^{۲})^{۳}\times A=I^{۳}\times A=A$. پس

$$A^{۷}+A^{۸}=A+I$$

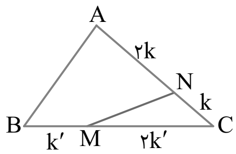
۵۵۶ **۱** در حالت کلی، حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}۱&۰\\ a&۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱&۰\\ b&۱\end{bmatrix}$ برابر است با $\begin{bmatrix}۱&۰\\ a&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\ b&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ a+b&۱\end{bmatrix}$. اکنون با توجه به این رابطه می‌توانیم ماتریس A را به‌دست آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۳&۱\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۱۰&۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۱+۲+\cdots+۱۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۵۵&۱\end{bmatrix}$$

دقت کنید که $۱+۲+\cdots+۱۰=\frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲}=۵۵$.

۴۶۹ (۳) چون $\frac{CN}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{۱}{۳}$ پس اعدادی مانند k و k' وجود دارند به طوری که



$$CN=k,\quad AC=۳k$$
$$BM=k',\quad BC=۳k'$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}CN\times CM\times \sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin\hat{C}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times k\times ۲k'\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}\times ۳k\times ۳k'\sin\hat{C}}=\frac{۲}{۹}$$

۴۷۰ (۲) چون

$$r=\frac{S}{P},\quad r_a=\frac{S}{P-a},\quad r_b=\frac{S}{P-b},\quad r_c=\frac{S}{P-c}$$
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پس

$$r\,r_a r_b r_c=\frac{S^۴}{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\frac{S^۴}{S^۲}=S^۲ \qquad (۱)$$

همچنین $h_a=\frac{۲S}{a}$، $h_b=\frac{۲S}{b}$ و $h_c=\frac{۲S}{c}$. بنابراین

$$h_a\,h_b\,h_c=\frac{۸S^۳}{abc} \qquad (۲)$$

با توجه به برابری‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{r\,r_a\,r_b\,r_c}{h_a\,h_b\,h_c}=\frac{S^۲}{\frac{۸S^۳}{abc}}=\frac{abc}{۸S}$$

می‌دانیم اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $R=\frac{abc}{۴S}$. پس

$$\frac{r\,r_a\,r_b\,r_c}{h_a h_b h_c}=\frac{۱}{۲}R=\frac{۱}{۲}\times ۱۶=۸$$

۴۷۱ (۱) چون $a_{ij}=i^۳+j^۳+ij$، پس به ازای هر i و j به‌دست می‌آید $a_{ij}=a_{ji}$. پس درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های پایین قطر اصلی نظیربه‌نظیر با هم برابرند. در نتیجه $x=y$، یعنی $\frac{x}{y}=۱$.

۴۷۲ (۱) طرفین برابری اول را در ۲ و طرفین برابری دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا ماتریس A به‌دست آید:

$$\begin{cases} ۴A+۶B=\begin{bmatrix} ۴ & ۱۰ \\ -۲ & ۸ \end{bmatrix} \\ ۹A-۶B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۶ & -۶ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow ۱۳A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

یعنی $A=\begin{bmatrix} \frac{۷}{۱۳} & \frac{۱۰}{۱۳} \\ \frac{۴}{۱۳} & \frac{۲}{۱۳} \end{bmatrix}$. بنابراین

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A=\frac{۷}{۱۳}+\frac{۲}{۱۳}=\frac{۹}{۱۳}$$

۴۷۳ (۳) از برابری $۲A-B=I$ به‌دست می‌آید

$$B=۲A-I=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $۲=۱-۲+۴-۱=$ مجموع درایه‌های ماتریس B.

۴۷۴ (۲) به سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+b & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲+\cdots+n & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{n(n+۱)}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$.

چون درایهٔ سطر دوم و ستون اول A برابر ۵۵ است، پس

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=۵۵\Rightarrow n=۱۰$$

۴۷۵ (۲) دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر برابر باشند:

$$A=B\Rightarrow\begin{cases} \left.\begin{matrix} ۲m+n=۵ \\ m-n=-۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۳m=۳\Rightarrow m=۱\Rightarrow n=۳ \\ \left.\begin{matrix} p+۳=-t \\ p+۲=t-۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲p+۵=-۱\Rightarrow p=-۳\Rightarrow t=۰ \end{cases}$$

بنابراین $۲m-n+p+۳t=۲(۱)-۳-۳+۰=-۴$.

۴۷۶ (۴) ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^۲-۱ & ۲a \\ -۲a & a^۲-۱ \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ برابر صفر است، پس

$$a^۲-۱+۲a-۲a+a^۲-۱=۰\Rightarrow ۲a^۲=۲\Rightarrow a=\pm ۱$$

پس مجموع مقادیر a برابر صفر است.

۴۷۷ (۲) ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۶ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}=۲A$$

می‌دانیم اگر $A^۲=kA$، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n، $A^n=k^{n-۱}A$، پس $A^۶=۲^۵A=۳۲A$. بنابراین $k=۳۲$.

۴۷۸ (۲) از تساوی $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ نتیجه می‌گیریم $AB=BA$. پس

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & y \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x+۱ & x+y \\ ۵ & ۲y+۱ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} ۱ & y \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲y+۱ & x+y \\ ۵ & ۳x+۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB=BA\Rightarrow ۳x+۱=۲y+۱\Rightarrow ۳x=۲y\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}$$

۴۷۹ (۱) راه‌حل اول ابتدا ماتریس $A^{۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

از فرض تست نتیجه می‌گیریم

$$A^{۳}=\alpha A+\beta I_{۲}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha+\beta & ۰ \\ \alpha & ۲\alpha+\beta \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \alpha+\beta=۱ \\ \alpha=۷ \end{cases}\Rightarrow\beta=-۶$$

دقت کنید چون مقادیر $\alpha=۷$ و $\beta=-۶$ در تساوی $۲\alpha+\beta=۸$ نیز صدق می‌کنند، پس این مقادیر قابل قبول هستند، پس $\alpha-\beta=۷+۶=۱۳$.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون،

$$A^{۲}=(۱+۲)A-(۲-۰)I_{۲}\Rightarrow A^{۲}=۳A-۲I_{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{در } A}A^{۳}=۳A^{۲}-۲A$$

$$A^{۳}=۳(۳A-۲I_{۲})-۲A\Rightarrow A^{۳}=۹A-۶I_{۲}-۲A\Rightarrow A^{۳}=۷A-۶I_{۲}$$

با مقایسهٔ این تساوی با $A^{۳}=\alpha A+\beta I_{۲}$، نتیجه می‌گیریم $\alpha=۷$ و $\beta=-۶$. پس

$$\alpha-\beta=۱۳$$

۴۸۰ (۲) راه‌حل اول از تساوی $A^{۲}-A+I=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^{۲}=A-I$. پس

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=(A-I)(A-I)=A^{۲}-۲A+I$$

$$\xrightarrow{A^{۲}=A-I}A^{۴}=A-I-۲A+I=-A$$

بنابراین

$$A^{۴۰۰}=(A^{۴})^{۱۰۰}=(-A)^{۱۰۰}=A^{۱۰۰}=(A^{۴})^{۲۵}=(-A)^{۲۵}$$
$$=-(A^{۴})^{۶}\times A=-(-A)^{۶}\times A=-A^{۷}=-A^{۴}\times A^{۳}$$
$$=-(-A)A^{۳}=A^{۴}=-A$$

راه حل دوم طرفین فرض را در $A+I$ ضرب می‌کنیم:

$$(A+I)(A^{۲}-A+I)=\bar{O}\Rightarrow A^{۳}+I=\bar{O}\Rightarrow A^{۳}=-I$$

اکنون می‌توان نوشت $A^{۴۰۰}=(A^{۳})^{۱۳۳}A=(-I)^{۱۳۳}A=-IA=-A$

۴۸۱ (۳) از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}=[i^{۲}-۳j]_{۲\times۲}-[i]_{۲\times۲}=[i^{۲}-i-۳j]_{۲\times۲}$$

اگر $A=\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}$، آن‌گاه چون $a_{۱۱}=m$ و $a_{۲۲}=n$، پس $m=۱-۱-۳=-۳$ و $n=۴-۲-۶=-۴$، بنابراین $m+n=-۳-۴=-۷$.

۴۸۲ (۴) ابتدا دو معادلهٔ داده شده را با هم جمع می‌کنیم، در این صورت $۲X=A+B$. اکنون معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم

$$۲Y=A-B\Rightarrow Y=\frac{A-B}{۲}$$

در نتیجه $۲X+Y=A+B+\frac{A-B}{۲}=\frac{۳A+B}{۲}$، یعنی

$$۲X+Y=[\frac{۳(i-j)+i+j}{۲}]_{۲\times۲}=[۲i-j]_{۲\times۲}$$

پس $۲X+Y=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$. در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر است با $۱+۰+۳+۲=۶$.

۴۸۳ (۱) برای تعریف شدن ماتریس BC باید $n=۳$. فرض کنید $D=BC$، در این صورت D ماتریسی از مرتبهٔ $m\times۵$ است. از طرف دیگر، برای تعریف شدن ضرب ماتریسی $A_{۲\times۳}D_{m\times۵}$ باید $m=۳$. بنابراین $m+n=۳+۳=۶$.

۴۸۴ (۱) چون $c_{۱۳}=-۲$، پس

$$\begin{bmatrix} a & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۳a+۲-۱=-۲$$

یعنی $a=-۱$. همچنین از $c_{۲۲}=۰$ به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=۲b+۸=۰$$

یعنی $b=-۴$. اکنون به‌دست می‌آید $a+b=-۱-۴=-۵$.

۴۸۵ (۳) ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱۲۰ & ۱۴۴ \\ -۱۰۰ & -۱۲۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۲۰ & ۱۴۴ \\ -۱۰۰ & -۱۲۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

بنابراین $A^{۱۳۹۹}=\bar{O}$.

۴۸۶ (۳) ماتریس $A+I$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

اکنون $(A+I)^{۲}$ و $(A+I)^{۳}$ را به‌دست می‌آوریم تا شاید بتوان از روی آن‌ها جواب را به‌دست آورد:

$$(A+I)^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های بالا، اگر درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم را از درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول کم کنیم، حاصل برابر ۱ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که $a-b=۱$. توجه کنید که این استدلال برای تست به‌کار می‌رود و در مسئله‌های تشریحی جواب نمی‌دهد.