

☆ ۱۴۸۵. اگر $0 < a < 1$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

$$\log_3 a > 1 \quad (۴) \quad \frac{1}{\log_a 7} > \frac{1}{\log_a 5} \quad (۳) \quad \log_a 5 > \log_a 2 \quad (۲) \quad \log_3 a > 0 \quad (۱)$$

☆ ۱۴۸۶. کدام گزینه درست است؟

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2 \quad (۴) \quad \log_5 3 > \log_3 5 \quad (۳) \quad \log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_3 2 \quad (۲) \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} \quad (۱)$$

قسمت سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در صفحات ۵۱۸ تا ۵۲۳ مطالعه نمایید.)

○ فب رسیدیم به مهم‌ترین قسمت تابع نمایی و لگاریتمی هتماً روی تمامی تستای این قسمت وقت بزار.

قوانین و ویژگی‌های لگاریتم

☆ ۱۴۸۷. حاصل $\log_5(\sqrt{125})^3$ کدام است؟

$$5/5 \quad (۴) \quad 5 \quad (۳) \quad 4/5 \quad (۲) \quad 4 \quad (۱)$$

(سراسری ریاضی - ۹۱)

☆ ۱۴۸۸. اگر $A = 3^a$ باشد، $\log_3 9A^2$ کدام است؟

$$3 + a^2 \quad (۴) \quad 2 + a^2 \quad (۳) \quad 3 + 2a \quad (۲) \quad 2 + 2a \quad (۱)$$

(سراسری تجربی - ۸۸)

☆ ۱۴۸۹. اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a+1)$ در پایه ۴ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad \sqrt{2} \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۰. حاصل $\log_{x\sqrt{x}} \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$ کدام است؟

$$\frac{8}{9} \quad (۴) \quad \frac{5}{8} \quad (۳) \quad \frac{9}{8} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۱. اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 0/1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟

$$1 \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad -2 \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۲. اگر $\log \frac{1}{4} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{n}{n+1} = -2$ ، مقدار n کدام است؟

$$\frac{99}{100} \quad (۴) \quad 101 \quad (۳) \quad 99 \quad (۲) \quad 100 \quad (۱)$$

(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۸۷)

☆ ۱۴۹۳. اگر $2\sqrt{2} \log_4 x = 8$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه x کدام است؟

$$3 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad \frac{3}{2} \quad (۲) \quad \frac{4}{3} \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۴. اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ ، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ کدام است؟

$$7 \quad (۴) \quad 6 \quad (۳) \quad 5 \quad (۲) \quad 4 \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۵. اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، حاصل $3 \log \sqrt[3]{45}$ کدام است؟

$$2a - b + 1 \quad (۴) \quad 2b - a + 1 \quad (۳) \quad 2a - b \quad (۲) \quad 2b - a \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۶. اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد، حاصل $26 \log_{27} 2 \times \log_4 3 \times \dots \times \log_3 2$ کدام است؟

$$\frac{1}{3a} \quad (۴) \quad \frac{1-a}{3a} \quad (۳) \quad \frac{1-a}{6a} \quad (۲) \quad \frac{1}{6a} \quad (۱)$$

(سراسری تجربی - ۹۰)

☆ ۱۴۹۷. اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $2 \log(1+\sqrt{5}) + \log(6-2\sqrt{5})$ کدام است؟

$$2k \quad (۴) \quad 1+k \quad (۳) \quad 4k \quad (۲) \quad 2+4k \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۸. اگر $A = \sqrt{10^{\log 4 + 2 \log 3}}$ ، مقدار $\log_{\sqrt{8}} \frac{3}{A}$ کدام است؟

$$-\frac{2}{3} \quad (۴) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad -\frac{3}{2} \quad (۲) \quad \frac{3}{2} \quad (۱)$$

☆ ۱۴۹۹. حاصل $\sqrt{10}^{2 \log 2 + 3 \log 3}$ کدام است؟

$$15\sqrt{3} \quad (۴) \quad 12\sqrt{3} \quad (۳) \quad 9\sqrt{3} \quad (۲) \quad 6\sqrt{3} \quad (۱)$$

(سراسری ریاضی - ۹۰)

☆ ۱۵۰۰. اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A}-1)$ در پایه ۴ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \quad -3 \quad (۱)$$

☆ ۱۵۰۱. اگر $\log_7 \sqrt[5]{e^2} = A$ حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ کدام است؟

$$\frac{A}{4} \quad (1) \quad \frac{A}{2} \quad (2)$$

☆ ۱۵۰۲. اگر $\log 5 = a$ باشد، $\log_8 100$ برابر کدام است؟

$$\frac{2}{3(1-a)} \quad (1) \quad \frac{2}{3(1+a)} \quad (2)$$

☆ ۱۵۰۳. اگر $2^a = 10$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{3}} 25$ کدام است؟

$$4(a-1) \quad (1) \quad \frac{4}{a-1} \quad (2)$$

☆ ۱۵۰۴. اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

$$1-4k \quad (1) \quad 2-5k \quad (2) \quad 1-2k \quad (3)$$

☆ ۱۵۰۵. اگر $\log_a x = 8$ ، $\log_b x = 3$ و $\log_c x = 6$ باشد، مقدار عددی $\log_{abc} x$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad \frac{17}{3} \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۶. حاصل $\frac{\log(\log a)}{\log a}$ کدام است؟

$$a \quad (1) \quad \log a \quad (2) \quad (\log a)^2 \quad (3) \quad \log(\log a) \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۷. حاصل $[\log_3 241]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۸. حاصل $[\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۹. اگر $\log 2 = a$ باشد، مقدار $\log_4 125$ بر حسب a کدام است؟

$$\frac{3a-1}{2a} \quad (1) \quad \frac{3a+1}{2a} \quad (2) \quad \frac{3(1+a)}{2a} \quad (4) \quad \frac{3(1-a)}{2a} \quad (3)$$

☆ ۱۵۱۰. اگر $4a^2 + 9b^2 = 4ab$ باشد، حاصل $\log \frac{2a+3b}{4}$ برابر است با

$$\log 2ab \quad (1) \quad \frac{\log 2a + \log 3b}{2} \quad (2) \quad \frac{\log 2a + \log 3b}{4} \quad (3) \quad \frac{\log a + \log b}{2} \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۱. اگر $\log_3 12 = a$ باشد، $\log_3 18$ کدام است؟

$$\frac{a-3}{2} \quad (1) \quad \frac{a+3}{2} \quad (2) \quad \frac{a-1}{2} \quad (3) \quad \frac{1-a}{2} \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۲. اگر $\log_3 27 = a$ باشد، مقدار $\log_9 16$ برابر است با

$$\frac{4(3-a)}{3+a} \quad (1) \quad \frac{3(3+a)}{3-a} \quad (2) \quad \frac{4(3+a)}{3-a} \quad (4) \quad \frac{3(3+a)}{3-a} \quad (3)$$

☆ ۱۵۱۳. اگر $\log 2 = 0.301$ باشد، عدد $A = 2^{200}$ چند رقم دارد؟

$$46 \quad (1) \quad 51 \quad (2) \quad 59 \quad (3) \quad 61 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۴. نمودار تابع $f(x) = a + \log_4(x+b)$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{1}{4}$ و نیمساز ربع سوم را در نقطه‌ای به طول (-1) قطع می‌کند. $f^{-1}(0)$ کدام است؟

$$-1 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۵. تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_7(bx-4)$ ، از دو نقطه $(2,6)$ و $(10,12)$ می‌گذرد. a کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۶. تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_7(3x+b)$ ، از دو نقطه $(5,11)$ و $(15,21)$ می‌گذرد. a کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۷. اگر $x \in (1, +\infty)$ و $f(x) = \log_3(x-1) - \log_3(x+1)$ ، ضابطه تابع معکوس f کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{1-3^x}{1+3^x} \quad (1) \quad f^{-1}(x) = \frac{3^x+1}{3^x-1} \quad (2) \quad f^{-1}(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1} \quad (3) \quad f^{-1}(x) = \frac{1+3^x}{1-3^x} \quad (4)$$

(سراسری تجربی فارغ از کشور) - ۹۰

$$1-k \quad (4)$$

$$1-2k \quad (3)$$

$$2-5k \quad (2)$$

$$1-4k \quad (1)$$

$$\frac{17}{3} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{\log(\log a)}{\log a} \quad (17)$$

☆ ۱۵۰۶. حاصل $\frac{\log(\log a)}{\log a}$ کدام است؟

$$a \quad (1) \quad \log a \quad (2) \quad (\log a)^2 \quad (3) \quad \log(\log a) \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۷. حاصل $[\log_3 241]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۸. حاصل $[\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

☆ ۱۵۰۹. اگر $\log 2 = a$ باشد، مقدار $\log_4 125$ بر حسب a کدام است؟

$$\frac{3a-1}{2a} \quad (1) \quad \frac{3a+1}{2a} \quad (2) \quad \frac{3(1+a)}{2a} \quad (4) \quad \frac{3(1-a)}{2a} \quad (3)$$

☆ ۱۵۱۰. اگر $4a^2 + 9b^2 = 4ab$ باشد، حاصل $\log \frac{2a+3b}{4}$ برابر است با

$$\log 2ab \quad (1) \quad \frac{\log 2a + \log 3b}{2} \quad (2) \quad \frac{\log 2a + \log 3b}{4} \quad (3) \quad \frac{\log a + \log b}{2} \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۱. اگر $\log_3 12 = a$ باشد، $\log_3 18$ کدام است؟

$$\frac{a-3}{2} \quad (1) \quad \frac{a+3}{2} \quad (2) \quad \frac{a-1}{2} \quad (3) \quad \frac{1-a}{2} \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۲. اگر $\log_3 27 = a$ باشد، مقدار $\log_9 16$ برابر است با

$$\frac{4(3-a)}{3+a} \quad (1) \quad \frac{3(3+a)}{3-a} \quad (2) \quad \frac{4(3+a)}{3-a} \quad (4) \quad \frac{3(3+a)}{3-a} \quad (3)$$

☆ ۱۵۱۳. اگر $\log 2 = 0.301$ باشد، عدد $A = 2^{200}$ چند رقم دارد؟

$$46 \quad (1) \quad 51 \quad (2) \quad 59 \quad (3) \quad 61 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۴. نمودار تابع $f(x) = a + \log_4(x+b)$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{1}{4}$ و نیمساز ربع سوم را در نقطه‌ای به طول (-1) قطع می‌کند. $f^{-1}(0)$ کدام است؟

$$-1 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۵. تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_7(bx-4)$ ، از دو نقطه $(2,6)$ و $(10,12)$ می‌گذرد. a کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

☆ ۱۵۱۶. تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_7(3x+b)$ ، از دو نقطه $(5,11)$ و $(15,21)$ می‌گذرد. a کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

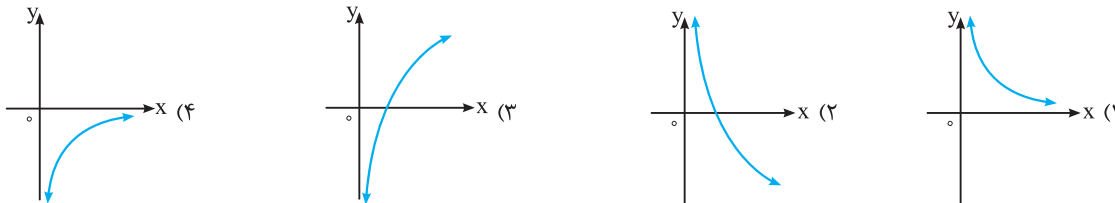
☆ ۱۵۱۷. اگر $x \in (1, +\infty)$ و $f(x) = \log_3(x-1) - \log_3(x+1)$ ، ضابطه تابع معکوس f کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{1-3^x}{1+3^x} \quad (1) \quad f^{-1}(x) = \frac{3^x+1}{3^x-1} \quad (2) \quad f^{-1}(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1} \quad (3) \quad f^{-1}(x) = \frac{1+3^x}{1-3^x} \quad (4)$$

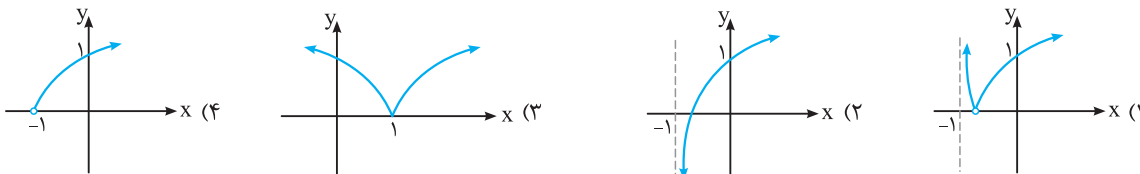
ویژگی‌ها و نمودار توابع لگاریتمی

تستای نمودار توابع لگاریتمی رو قبلاً حل کردی. تو این قسمت تستای نمودار توابع لگاریتمی با ویژگی‌هاش ترکیب شده. یعنی اول به کمک ویژگی‌هاش باید ضابطه رو ساده کنی، بعد نمودار اونو رسم کنی.

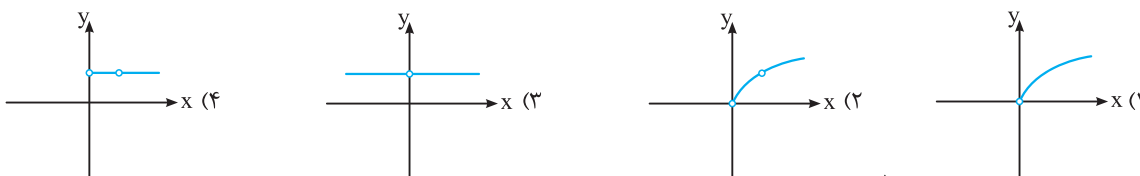
☆ ۱۵۱۸. نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$ کدام است؟



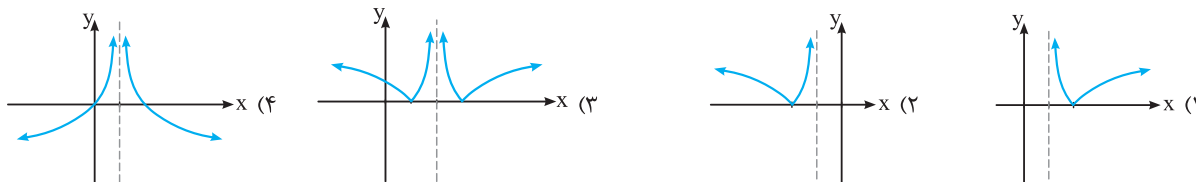
☆ ۱۵۱۹. منحنی تابع $2 \log y = \log(x+1)$ کدام است؟



☆ ۱۵۲۰. نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x} \log_{\frac{1}{2}} x$ به کدام صورت است؟



☆ ۱۵۲۱. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left| \log_9 \left(\frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) \right|$ به کدام صورت است؟



تساوی در توابع لگاریتمی

تستای تساوی دو تابع رو دیری و حل کردی. این‌ها سه تست از تساوی توابع لگاریتمی باید حل کنی.

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۱)

☆ ۱۵۲۲. نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

(۴) فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.

(۳) منطبق

(۲) $g(x)$ بالاتر

(۱) $f(x)$ بالاتر

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۸۹)

☆ ۱۵۲۳. دو تابع f و g در کدام حالت زیر مساوی‌اند؟

(۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ ، $g(x) = 1$

(۱) $f(x) = 2 \log x$ ، $g(x) = \log x^2$

(۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ، $g(x) = \frac{|x|}{x}$

(۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ ، $g(x) = x$

☆ ۱۵۲۴. دو تابع f و g در کدام حالت زیر برابرند؟

(۲) $\begin{cases} f(x) = \log(x-1) - \log(x+1) \\ g(x) = \log \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$

(۱) $\begin{cases} f(x) = \log x + \log(x-1) \\ g(x) = \log(x^2 - x) \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} f(x) = \log x^4 \\ g(x) = 4 \log x \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} f(x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} \\ g(x) = \log_{\sqrt{2}} x \end{cases}$

معادلات لگاریتمی

با به نگاه به تفرار تستای کنکور این قسمت، به برأت می شه گفت، معادلات لگاریتمی، مهم ترین قسمت لگاریتمه.

- ☆ ۱۵۲۵. اگر $\log 3 + \log \sqrt[3]{3} = \log (81)^k$ ، آن گاه لگاریتم $\frac{5}{k}$ در پایه ۲ کدام است؟
 (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (سراسری تجربی-۸۶)
- ☆ ۱۵۲۶. اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن گاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۲ کدام است؟
 (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{4}{2}$ (سراسری تجربی-۸۷)
- ☆ ۱۵۲۷. اگر $\log \frac{2}{x} + \log (x+1) = 1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه ۸ کدام است؟
 (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{4}$ (سراسری ریاضی-۸۵)
- ☆ ۱۵۲۸. اگر $2 \log (x-2) = \log (x+10)$ باشد، آن گاه $\log_4 (x+2)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{2}$ (سراسری ریاضی-۸۵)
- ☆ ۱۵۲۹. اگر $2 \log (x+1) = \log (2x+10)$ ، حاصل لگاریتم عدد $x\sqrt{3}$ در مبنای $\frac{1}{x}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) $-\frac{3}{2}$ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۸۸)
- ☆ ۱۵۳۰. از تساوی $\log (2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3$ مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۸۸)
- ☆ ۱۵۳۱. از معادله لگاریتمی $\log_4 (2x^2+1) - \log_4 (x+2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸ کدام است؟
 (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (سراسری تجربی-۹۵)
- ☆ ۱۵۳۲. از تساوی $\log_4 (2x-1) + \log_5 (3x-5) = 1$ مقدار $\log_4 (6x+3)$ کدام است؟
 (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (سراسری ریاضی-۸۶)
- ☆ ۱۵۳۳. از معادله لگاریتمی $2 \log x = 1 + \log (x + \frac{12}{5})$ مقدار $\log_5 (2x+1)$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۸۵)
- ☆ ۱۵۳۴. از معادله $\log_3 (x^2-1) = 1 + \log_3 (x+3)$ مقدار لگاریتم $(x-3)$ در مبنای ۴ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱ (سراسری ریاضی-۸۸)
- ☆ ۱۵۳۵. اگر $\log (x-2) = 2 \log 2 - \log (x-4)$ حاصل $\log_5 (x-3)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$ (سراسری ریاضی-۸۷)
- ☆ ۱۵۳۶. از معادله لگاریتمی $\log (x^2-x-6) - \log (x-3) = \log (2x-5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۱ (سراسری تجربی خارج از کشور-۹۵)
- ☆ ۱۵۳۷. از معادله $\log 3^0 - \log 2 = \log (2x-1) + \log (x+3) = \log 3^0$ مقدار $\log_8 x$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (سراسری ریاضی-۸۷)
- ☆ ۱۵۳۸. مجموعه جواب معادله $\log (x-4) + \log x - \log (x-1) = \log 5 - 2 \log 2$ کدام است؟
 (۱) $\{\frac{1}{4}, 5\}$ (۲) $\{5\}$ (۳) $\{\frac{9}{4}\}$ (۴) $\{\frac{1}{4}\}$ (سراسری ریاضی-۸۷)
- ☆ ۱۵۳۹. اگر $x = 2$ یکی از جواب های معادله $\log_v (x - \sqrt{2}) = \log_{a+v} x - \log_v (x + \sqrt{2})$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) جواب دیگری ندارد.

۱۵۴۰. اگر معادله $\frac{1}{5-4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$ دو ریشه حقیقی داشته باشد، آن گاه.....

- (۱) یکی از ریشه‌ها، دو برابر ریشه دیگر است.
 (۲) یکی از ریشه‌ها، دو واحد بیش‌تر از ریشه دیگر است.
 (۳) یکی از ریشه‌ها، قرینه ریشه دیگر است.
 (۴) یکی از ریشه‌ها، مربع ریشه دیگر است.

(سراسری تجربی- ۹۳)

۱۵۴۱. از تساوی $\log_x(x^2+4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) ۲

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۳)

۱۵۴۲. از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) ۲

۱۵۴۳. اگر $2^{\log x} + x^{\log 2} = \sqrt{2}$ باشد، x کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$
 (۲) $10\sqrt{10}$
 (۳) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$
 (۴) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

۱۵۴۴. جواب(های) معادله $5 = 4x^{\log 5} - 25^{\log x}$ کدام است؟

- (۱) 10 ، 1
 (۲) 5 ، -1
 (۳) 5
 (۴) 10

۱۵۴۵. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $625 = x^{\log 5}$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) $\frac{1}{5}$
 (۳) ۵
 (۴) ۲۵

۱۵۴۶. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{5x}{2} = \log_x 2$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) ۲

۱۵۴۷. در معادله $3 = \log_{\frac{1}{3}} x^2 - (\log_3 x)^2$ ، ریشه بزرگ‌تر معادله چند برابر ریشه کوچک‌تر آن است؟

- (۱) ۲۷
 (۲) ۳۶
 (۳) ۸۱
 (۴) ۱۰۰

۱۵۴۸. اگر $2 = \log_{\sqrt{x}} 2 + \log_{\sqrt{x}} x$ ، مقدار $\log_x 125$ کدام است؟

- (۱) -۳
 (۲) -۲
 (۳) -۱
 (۴) ۱

۱۵۴۹. از معادلات $4 = 2^x \times 8^y$ و $\log x = \log 2 + \log y$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{4}{5}$

(سراسری تجربی- ۹۶)

۱۵۵۰. از دو معادله دو مجهولی $1 = 4^{x-y} \times 4^{x+y}$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ ، مقدار y کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۶)

۱۵۵۱. از دو معادله دو مجهولی $9 \times 3^{x-y} = 3^{2x+y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{5}$
 (۴) $\frac{1}{6}$

۱۵۵۲. با توجه به دستگاه $\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-1} = 9^{y+1} \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{cases}$ ، مقدار $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) $\frac{40}{7}$
 (۳) ۱۰
 (۴) ۸

(سراسری تجربی- ۸۵)

۱۵۵۳. اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $4\sqrt{2} = \log y + 1 + \log \sqrt{x+1}$ باشند، مقدار y کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{5}$
 (۲) $\frac{12}{5}$
 (۳) ۱۵
 (۴) ۲۵

۱۵۵۴. مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{1}{3} \\ xy = 16 \end{cases}$ شامل چند زوج مرتب است؟

- (۱) چهار
 (۲) دو
 (۳) یک
 (۴) هیچ

- ☆ ۱۵۵۵. از دو معادله $\log_p x + \log_p y = 2$ و $\log_p x + \log_p y = 46$ ، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)
- (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۲/۵
- ☆ ۱۵۵۶. از دو معادله $\log_p x = 1 + \log_p(y+1)$ و $\log_p x - y^2 = 32$ ، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲
- ☆ ۱۵۵۷. از دو معادله $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ ، مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ☆ ۱۵۵۸. از تساوی های $4^x - 2^x = 56$ و $\log_x y - \log_y x^2 = 1$ ، بیشترین مقدار y کدام است؟
- (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۲
- ☆ ۱۵۵۹. از دو معادله $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ ، مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ☆ ۱۵۶۰. از دو معادله $\log(y+x-1) + \log(2y+3) = 0$ و $\log(x-4y) = 2 \log 2$ ، مقدار xy کدام است؟
- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲
- (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶، با کمی تغییر)
- ☆ ۱۵۶۱. از دو معادله $\log(2y-3x) + \log 2 = 0$ و $\log(2x+1) + \log(y-2) - \log y = \log 3$ ، مقدار xy کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰
- (سراسری تجربی- ۹۶، با کمی تغییر)
- ☆ ۱۵۶۲. معادله $\frac{\log x}{x} = \frac{\log 2}{2}$ چند جواب دارد؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

کاربردهای لگاریتم

- همون طور که گفتیم این مبحث پریریه، واسه همینم تست کنگور ارزش نداریم. ولی احتمالاً به زودی از این قسمت هم تو کنگور تست مطرح می شه.
- ☆ ۱۵۶۳. اگر نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۴۰ سال باشد، بعد از گذشت ۴۰۰ سال، از یک نمونه ۲۵۶ گرمی چند گرم باقی می ماند؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- (۱) ۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۲۵ (۴) ۰/۱۲۵
- ☆ ۱۵۶۴. نیمه عمر عنصری ۵ روز است. تقریباً پس از چند روز از یک نمونه به جرم یک گرم، ۰/۰۰۱ گرم باقی می ماند؟ ($\log 2 \approx 0.301$) (برگرفته از کتاب درسی)
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰۰
- ☆ ۱۵۶۵. زمین لرزه‌ای به بزرگی $M = 4/8$ در مقیاس ریشتر، چقدر انرژی در مقیاس ارگ (Erg) آزاد می کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- (۱) 10^{20} (۲) 10^{19} (۳) $10^{18/4}$ (۴) $10^{17/8}$
- ☆ ۱۵۶۶. اگر انرژی آزاد شده در یک زمین لرزه برابر $10^{19/6}$ در مقیاس ارگ باشد، بزرگی زمین لرزه در مقیاس ریشتر کدام است؟
- (۱) ۴/۶ (۲) ۴/۸ (۳) ۵/۲ (۴) ۵/۴



تست های V.I.P

- ☆ ۱۵۶۷. معادله $(27)^x + (12)^x = 2 \times 8^x$ چند جواب دارد؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ☆ ۱۵۶۸. معادله $81 \times (16)^x + 16 \times (81)^x = 97 \times (36)^x$ چند جواب دارد؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار
- ☆ ۱۵۶۹. معادله $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = 8$ چند جواب دارد؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار
- ☆ ۱۵۷۰. مجموعه جواب نامعادله $x^{\sqrt{x}} > \sqrt{x^x}$ بازه (a, b) است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟
- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۵۷۱. در دستگاه $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases}$ با شرط $\begin{cases} x, y \neq 0, 1 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$ حاصل xy کدام است؟

(۱) a^{a-1} (۲) $\frac{a-1}{a^{a+1}}$ (۳) a (۴) $\frac{1}{a}$

۱۵۷۲. ریشه معادله $\sqrt{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \frac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} \times \frac{3 \log_{\Delta} 3 - 4}{4 \log_{\Delta} 3 - 3}$ (۲) $2 \times \frac{\log_{\Delta} 3 - 4}{4 \log_{\Delta} 3 - 7}$ (۳) $2 \times \frac{4 \log_{\Delta} 3 - 7}{3 \log_{\Delta} 3 - 4}$ (۴) $\frac{1}{2} \times \frac{4 \log_{\Delta} 3 - 3}{3 \log_{\Delta} 3 - 4}$

۱۵۷۳. برد تابع $f(x) = \log_{0.2}(x^2 - 4x + 9)$ کدام است؟

(۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -1]$ (۴) $(-\infty, 1]$

۱۵۷۴. اگر $x = \log_a bc$ ، $y = \log_b ac$ ، $z = \log_c ab$ باشد، مقدار xyz با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $3 + xy + yz + xz$ (۲) $2 + xy + yz + xz$ (۳) $3 + x + y + z$ (۴) $2 + x + y + z$

۱۵۷۵. اگر a ، b و c اندازه سه ضلع مثلث ABC باشند و $a \log_{c-b} a + \log_{b+c} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$ ، در این صورت کدام گزینه در مورد

مثلث ABC درست است؟

(۱) متساوی الساقین است. (۲) قائم الزاویه (۳) متساوی الاضلاع (۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

۱۵۷۶. معادله $x = \log_a x$ در هر یک از حالت‌های $a > 1$ یا $0 < a < 1$ به ترتیب از راست به چپ چند ریشه دارد؟

(۱) صفر، ۱ (۲) ۱، ۱ (۳) صفر، حداقل یک ریشه (۴) صفر، حداکثر یک ریشه

۱۵۷۷. اگر $2 \log_2 a = b$ ، $\log_{\Delta} 3 = b$ و $\log_{\Delta} 5 = c$ ، حاصل $\log_{15} 14$ کدام است؟

(۱) $\frac{ab+1}{abc+b}$ (۲) $\frac{bc+a}{ab+1}$ (۳) $\frac{abc}{bc+1}$ (۴) $\frac{abc+1}{bc+c}$

۱۵۷۸. حاصل عبارت $\frac{\log(\log 8)}{\log 7} + 8 \frac{\log(\log 125)}{\log 8}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۱۵ (۳) ۵۶ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۵۷۹. اگر $\log_7 \sin 5^\circ = a$ باشد، حاصل $\log_7 (3 - 4 \cos 10^\circ + \cos 20^\circ)$ کدام است؟

(۱) $3 + 4a$ (۲) $2a + 3$ (۳) $2a^2 + 1$ (۴) $4a^2 + 1$

۱۵۸۰. جواب معادله $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$ کدام است؟

(۱) $2 \log_{18} 3$ (۲) $4 \log_{12} 2$ (۳) $2^{1+\log_4 3}$ (۴) $4 \log_{10} 3$

۱۵۸۱. مجموع ریشه‌های معادله $x^{1+\log_2 x} - 4x^2 = 0$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $3/5$ (۳) ۴ (۴) $4/5$

۱۵۸۲. معادله $6^{\log x} + 8^{\log x} = x$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵۸۳. از دستگاه معادلات $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77 \\ \frac{x}{3^2} - \frac{y}{2^2} = 7 \end{cases}$ حاصل $\log_y x$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۵۸۴. جواب معادله $\log(\log x) = \sqrt{\frac{(m+n)\log(m-n)}{(m-n)\log(m+n)}}$ کدام است؟

(۱) 10 (۲) $10^{m^2-n^2}$ (۳) 10^{10} (۴) $10^{m^2+n^2}$

۱۴۸۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_3 9A^{\frac{A}{3}} \log_3 9 \times (3^A)^{\frac{A}{3}} = \log_3 3^{\frac{A}{3}} \times 3^{2A}$$

$$= \log_3 3^{2A+\frac{A}{3}} = 2A + \frac{A}{3}$$

۱۴۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\log_4 (4a+1) \stackrel{a=\frac{3}{4}}{=} \log_4 4 = 1$$

۱۴۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{x\sqrt{x}} \sqrt{x^2\sqrt{x}} = \log_{\sqrt{x^3}} \sqrt{\sqrt{x^5}} = \log_{\sqrt{x^3}} \sqrt[6]{x^5}$$

$$= \log_{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}} x^{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{9}$$

۱۴۹۱ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 1 = 0$ هستند. پس:
 $S = a + b = 10$ ، $P = ab = 1$
 بنابراین داریم: $\log a + \log b - \log(a+b) = \log ab - \log(a+b)$
 $\log 1 - \log 10 = \log 10^{-1} - \log 10 = -1 - 1 = -2$

۱۴۹۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{n}{n+1} = -2$$

$$\Rightarrow \log \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n+1)} = -2 \Rightarrow \log \frac{1}{n+1} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} = 10^{-2} = \frac{1}{100} \Rightarrow n+1 = 100 \Rightarrow n = 99$$

۱۴۹۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x = 8 \log_4 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 8 \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}} = 8 \times \frac{3}{4} \Rightarrow x = 6$$

$$\log_x 4(x+3) \stackrel{x=6}{=} \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

۱۴۹۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{\sqrt{b}} ab^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} ab^{\frac{1}{2}} = 2 \log_b ab^{\frac{1}{2}} = 2(\log_b a + \log_b b^{\frac{1}{2}})$$

$$= 2(\log_b a + \frac{1}{2}) \stackrel{\log_b a = \frac{3}{2}}{=} 2(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = 2(\frac{4}{2}) = 4$$

۱۴۹۵ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: $\log 5 = 1 - \log 2$

از آن جایی که $\log 2 = a$ ، بنابراین $\log 5 = 1 - a$ خواهد بود، در نتیجه:
 $3 \log \sqrt[3]{45} = 3 \times \frac{1}{3} \log 45 = \log 9 + \log 5 = 2 \log 3 + \log 5$
 $= 2b + 1 - a$

۱۴۸۳ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا دامنه لگاریتم را می‌یابیم:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ یا } x < 0 \quad (1)$$

چون پایه لگاریتم عددی بین صفر و یک است، پس با حذف لگاریتم، جهت نامعادله عوض می‌شود.

$$\log_{\frac{1}{4}} (x^2 - 3x) > -1 \Rightarrow x^2 - 3x < (\frac{1}{4})^{-1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x < 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 4 \quad (2)$$

با اشتراک‌گیری بین مجموعه جواب‌های (۱) و (۲)، مجموعه جواب $(-1, 0) \cup (3, 4)$ به دست می‌آید. پس:

$$(a, b) \cup (c, d) = (-1, 0) \cup (3, 4) \Rightarrow a = -1, b = 0, c = 3, d = 4$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 6$$

۱۴۸۴ ۱ ۲ ۳ ۴

در A چون عبارت تحت لگاریتم از مبنا بزرگ‌تر است، پس $A > 1$. اما در B چون عبارت تحت لگاریتم از مبنا کوچک‌تر است، پس $B < 1$ بنابراین $A > B$

۱۴۸۵ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $a > 1$ و $x > 1$ یا $0 < a < 1$ و $0 < x < 1$ ، آن‌گاه $\log_a x$ مثبت و چنانچه $a > 1$ و $0 < x < 1$ یا $0 < a < 1$ و $x > 1$ ، آن‌گاه $\log_a x$ منفی است.

گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند. $\Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \log_3 a < 0$

گزینه (۲) نادرست است. $\Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \log_a 5 < \log_a 2$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_{\gamma} a > \log_{\delta} a \Rightarrow \frac{1}{\log_a \gamma} > \frac{1}{\log_a \delta}$$

۱۴۸۶ ۱ ۲ ۳ ۴

بر اساس نکته تست قبل، حاصل $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100}$ مثبت و حاصل $\log_{\frac{1}{2}} 100$ منفی است و در نتیجه رابطه $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} 100$ برقرار است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): داریم $\log_3 2 > 0$ و $\log_3 3 < 0$ ، پس رابطه $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2$ نادرست است.

گزینه (۳):

$$\begin{cases} 3 < 5 \Rightarrow \log_5 3 < \log_5 5 = 1 \Rightarrow \log_5 3 < 1 \\ 3 < 5 \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 5 \Rightarrow 1 < \log_3 5 \\ \Rightarrow \log_5 3 < 1 < \log_3 5 \end{cases}$$

گزینه (۴): می‌دانیم وقتی مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد و از طرفین نامساوی لگاریتم بگیریم، جهت نامساوی عوض می‌شود، پس:

$$2 < 3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 3$$

۱۴۸۷ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m} \log_a A$

$$\log_{\delta} (\sqrt{125})^3 = \log_{\delta} (\sqrt[3]{5^3})^3 = \log_{\delta} 5^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \log_{\delta} 5 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

۱۵۰۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad \text{نکته: (قانون تغییر مبنا)}$$

$$\log_5 = 1 - \log_2 = a \Rightarrow \log_2 = 1 - a$$

$$\log_{\lambda} 100 = \frac{\log 100}{\log \lambda} = \frac{2}{3 \log 2} = \frac{2}{3(1-a)}$$

۱۵۰۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{cases} 2^a = 10 \Rightarrow \log_2 10 = a \Rightarrow \log_{10} 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_5 = 1 - \log_2 = 1 - \frac{1}{a} \\ \log_{\sqrt{2}} 25 = \frac{\log 25}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log 5^2}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \log 5}{\frac{1}{2} \log 2} = \frac{4 \log 5}{\log 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 25 = \frac{4(1 - \frac{1}{a})}{\frac{1}{a}} = 4a(1 - \frac{1}{a}) = 4(a - 1)$$

۱۵۰۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{1/6} &= \log (1/6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1/6 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} (\log 1/6 - \log 10) = \frac{1}{3} (\log 2^f - 1) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1) \\ \frac{\log 2 = 1 - \log 5}{3} \cdot \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1) &= \frac{1}{3} (4(1 - 3k) - 1) \\ &= \frac{1}{3} (3 - 12k) = 1 - 4k \end{aligned}$$

۱۵۰۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \log_{abc} x &= \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} = \frac{24}{15} = \frac{\lambda}{5} \end{aligned}$$

۱۵۰۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \frac{\log(\log a)}{\log a} &= \log_a (\log a) \quad \text{با توجه به فرمول تغییر مبنا، داریم:} \\ \Rightarrow a^{\log_a (\log a)} &= (\log a)^{\log_a a} = \log a \end{aligned}$$

۱۵۰۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

ابتدا دو عدد صحیح متوالی مانند X و $X+1$ را به گونه‌ای می‌یابیم که
 $3^X < 241 < 3^{X+1}$ رابطه مقابل برقرار باشد:
 با کمی جستجو و آزمون و خطا، معلوم می‌شود که $X=4$ ، در واقع داریم:
 $3^4 < 241 < 3^5 \xrightarrow{\log_3 \text{ می‌گیریم}} \log_3 3^4 < \log_3 241 < \log_3 3^5$
 $\Rightarrow 4 < \log_3 241 < 5 \Rightarrow [\log_3 241] = 4$

۱۵۰۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\log_{a^n} A^n = \log_a A \quad \text{نکته:}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5} = \log_{(\sqrt[3]{2})^6} (\sqrt{5})^6 = \log_4 125 \quad \text{می‌توان نوشت:}$$

حال X را به گونه‌ای می‌یابیم که $4^X < 125 < 4^{X+1}$ با آزمون و خطا
 معلوم می‌شود که $X=3$ پس:

$$\begin{aligned} 4^3 < 125 < 4^4 \xrightarrow{\log_4 \text{ می‌گیریم}} \log_4 4^3 < \log_4 125 < \log_4 4^4 \\ \Rightarrow 3 < \log_4 125 < 4 \Rightarrow [\log_4 125] = 3 \end{aligned}$$

۱۴۹۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \cdot \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad \text{نکته:}$$

$$\log_{12} 3 = a \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 3 \times 2^2 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \log_3 3 + 2 \log_3 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow 1 + 2 \log_3 2 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 2 \log_3 2 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1-a}{2a} \quad (*)$$

$$\log_3 2 \times \log_4 3 \times \dots \times \log_{27} 27 = \log_{27} 2 = \log_{3^3} 2$$

$$\frac{1}{3} \log_3 2 \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3} \times \frac{1-a}{2a} = \frac{1-a}{6a}$$

۱۴۹۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 \\ &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) \\ &= \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

۱۴۹۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{نکته:}$$

$$A = \sqrt{10 \cdot \log 4 + 2 \log 3} = \sqrt{10 \cdot \log 4 + \log 9} = \sqrt{10 \cdot \log 36} = \sqrt{36} = 6$$

$$\log_{\sqrt{\lambda}} \frac{3}{A} = \log_{\sqrt{\lambda}} \frac{3}{6} = \log_{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{\lambda}{2}} 2^{-1} = -\frac{2}{\lambda} \quad \text{بنابراین:}$$

۱۴۹۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \quad \text{نکته:}$$

$$\sqrt{10} \cdot 2 \log 2 + 3 \log 3 = \sqrt{10} \cdot \log 2^2 + \log 3^3$$

$$= \sqrt{10} \cdot \log 4 + \log 27 = \sqrt{10} \cdot \log 4 \times 27 = (4 \times 27) \log \sqrt{10}$$

$$= (4 \times 27) \log 10^{\frac{1}{2}} = (4 \times 27)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4 \times 27} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

۱۵۰۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

بنابر فرض داریم:

$$\log_{\lambda} (2\sqrt{5}/25) = A \Rightarrow \log_{\lambda} (2 \times \sqrt{\frac{1}{5}}) = A$$

$$\Rightarrow \log_{\lambda} (2 \times 2^{-\frac{2}{2}}) = A \Rightarrow \log_{\lambda} 2^{\frac{1}{2}} = A \Rightarrow A = \frac{1}{9}$$

$$\log_4 \left(\frac{1}{A} - 1 \right) \stackrel{A=\frac{1}{9}}{=} \log_4 8 = \log_{4^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \frac{3}{2}$$

۱۵۰۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A \Rightarrow \log_2 e^{\frac{2}{5}} = A \Rightarrow \frac{2}{5} \log_2 e = A$$

$$\Rightarrow \log_2 e = \frac{5A}{2} \Rightarrow \log_e 2 = \frac{2}{5A} \quad (*)$$

$$\log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} 2^5 = 10 \log_e 2 \stackrel{(*)}{=} 10 \times \frac{2}{5A} = \frac{4}{A}$$

۱۵۱۵

$$\begin{cases} f(2) = 6 \\ f(12) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \log_2(2b - 4) = 6 \\ a + \log_2(12b - 4) = 10 \end{cases}$$

کم کردن طرفین معادلات

$$\log_2(12b - 4) - \log_2(2b - 4) = 4$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{12b - 4}{2b - 4} = 4 \Rightarrow \frac{12b - 4}{2b - 4} = 16 \Rightarrow 12b - 4 = 32b - 64$$

$$\Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b = 3$$

$$a + \log_2(2b - 4) = 6 \xrightarrow{b=3} a + \log_2 2 = 6 \Rightarrow a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$$

۱۵۱۶

$$\begin{cases} f(5) = 11 \\ f(21) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \log_2(15 + b)^2 = 11 \\ a + \log_2(63 + b)^2 = 15 \end{cases}$$

کم کردن طرفین معادلات

$$\log_2(63 + b)^2 - \log_2(15 + b)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2 \log_2(63 + b) - 2 \log_2(15 + b) = 4$$

$$\xrightarrow{\div 2} \log_2(63 + b) - \log_2(15 + b) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{63 + b}{15 + b} = 2 \Rightarrow \frac{63 + b}{15 + b} = 4$$

$$\Rightarrow 63 + b = 60 + 4b \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$a + \log_2(15 + b)^2 = 11 \xrightarrow{b=1} a + \log_2 16 = 11$$

$$\Rightarrow a + \log_2 2^4 = 11 \Rightarrow a + 4 = 11 \Rightarrow a = 7$$

۱۵۱۷

$$y = \log_3 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 3^y \Rightarrow x-1 = x \cdot 3^y + 3^y$$

$$\Rightarrow x(1 - 3^y) = 1 + 3^y \Rightarrow x = \frac{1 + 3^y}{1 - 3^y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 + 3^x}{1 - 3^x}$$

۱۵۱۸

داریم:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \log_{2^{-1}} x^{-1} = \frac{-1}{-1} \log_2 x = \log_2 x \Rightarrow y = \log_2 x$$

بنابراین نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$ بر نمودار $y = \log_2 x$ منطبق است. با توجه به مبنای لگاریتم در تابع $y = \log_2 x$ ، نمودار این تابع افزایشی بوده و همان طور که می‌دانیم نمودار آن به صورت گزینۀ (۳) است.

۱۵۱۹

برای آن که لگاریتم‌ها بامعنی باشند، باید داشته باشیم:

$$y > 0, x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

فقط گزینه‌های (۱) و (۴) در شرط $y > 0$ و $x > -1$ صدق می‌کنند. هم‌چنین داریم:

$$2 \log y = \log(x+1) \Rightarrow \log y^2 = \log(x+1) \Rightarrow y^2 = x+1$$

$$\xrightarrow{y>0} y = \sqrt{x+1}$$

بنابراین باید نمودار $y = \sqrt{x+1}$ را با شرط $x > -1$ و $y > 0$ رسم کنیم که برای این منظور کافی است $y = \sqrt{x}$ را یک واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل کنیم. در نتیجه نمودار تابع به صورت نمودار گزینۀ (۴) درمی‌آید.

۱۵۰۹

$$\log_4 125 = \frac{\log 125}{\log 4} = \frac{\log 5^3}{\log 2^2} = \frac{3 \log 5}{2 \log 2} = \frac{3 \log \frac{10}{2}}{2 \log 2}$$

$$= \frac{3(\log 10 - \log 2)}{2 \log 2} = \frac{3(1 - a)}{2a}$$

۱۵۱۰

$$4a^2 + 9b^2 + 12ab = 4ab + 12ab \Rightarrow (2a + 3b)^2 = 16ab$$

$$\left(\frac{2a + 3b}{4} \right)^2 = ab \Rightarrow 2 \log \frac{2a + 3b}{4} = \log ab = \log a + \log b$$

$$\Rightarrow \log \frac{2a + 3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

۱۵۱۱

$$\log_3 12 = \log_3 3 \times 2^2 = \log_3 3 + \log_3 2^2 = 1 + 2 \log_3 2 = a$$

$$\Rightarrow \log_3 2 = \frac{a-1}{2}$$

۱۵۱۲

$$\log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_{12} 3 = \frac{a}{3} \Rightarrow \log_3 12 = \frac{3}{a}$$

$$\Rightarrow \log_3 3 \times 4 = \frac{3}{a} \Rightarrow 1 + \log_3 4 = \frac{3}{a}$$

$$\Rightarrow 2 \log_3 2 = \frac{3-a}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3-a}{2a} \Rightarrow \log_3 3 = \frac{2a}{3-a}$$

$$\log_6 16 = \frac{1}{\log_{\frac{1}{6}} 6} = \frac{4}{\log_6 6} = \frac{4}{1 + \log_6 2} = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}$$

۱۵۱۳

نکته: اگر n یک عدد حسابی باشد و $10^{n+1} < A < 10^n$ ، آن‌گاه عدد A ، دارای $n+1$ رقم است.

$$\log A = \log 2^{200} = 200 \log 2 = 200 \times 0.301 \Rightarrow \log A = 60.2$$

$$\Rightarrow A = 10^{60.2}$$

چون $10^{60} < A < 10^{60.2}$ ، پس عدد $A = 2^{200}$ ، ۶۱ رقم دارد.

۱۵۱۴

طبق فرض نمودار تابع $f(x) = a + \log_4(x+b)$ از نقاط $(0, -\frac{1}{4})$ و $(-1, -1)$ می‌گذرد. پس:

$$\begin{cases} f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} = a + \log_4 b & (1) \\ f(-1) = -1 \Rightarrow -1 = a + \log_4(b-1) & (2) \end{cases}$$

طرفین تساوی (۲) را از طرفین تساوی (۱) کم می‌کنیم:

$$-\frac{1}{4} + 1 = (a + \log_4 b) - a - \log_4(b-1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \log_4 \frac{b}{b-1} \Rightarrow \frac{b}{b-1} = 4^{\frac{3}{4}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow b = 2b - 2$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow -1 = a + \log_4(2-1) \Rightarrow -1 = a + 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow y = -1 + \log_4(x+2) \xrightarrow{f^{-1}(0)} 0 = -1 + \log_4(x+2)$$

$$\Rightarrow \log_4(x+2) = 1 \Rightarrow x+2 = 4^1 \Rightarrow x = 4 - 2 = 2$$

۱۵۲۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

بررسی گزینه‌ها: گزینه (۱):
 $\begin{cases} x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

گزینه (۲): چون $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$ ، پس $D_f \neq D_g$ و در نتیجه این دو تابع برابر نیستند.

گزینه (۳): چون $D_f = [0, +\infty)$ و $D_g = \mathbb{R}$ ، پس $D_f \neq D_g$ و در نتیجه این دو تابع برابر نیستند.

گزینه (۴): $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ، هم‌چنین داریم:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

پس این دو تابع با هم برابر هستند.

۱۵۲۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

بررسی گزینه‌ها: گزینه (۱):
 $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$

$x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x > 1$ یا $x < 0$.

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

چون $D_f \neq D_g$ ، پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

گزینه (۲):
 $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

چون $D_f \neq D_g$ ، پس $f \neq g$

گزینه (۳): داریم $D_f = D_g = (0, +\infty)$. هم‌چنین برای هر $x \in (0, +\infty)$ می‌توان نوشت:

$$f(x) = \log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 x = \log_4 x = g(x)$$

پس این دو تابع با هم برابر هستند.

گزینه (۴):
 $\begin{cases} x^4 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ x > 0 \Rightarrow D_g = (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

۱۵۲۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا در صورت لزوم، طرفین معادله را به کمک قوانین و ویژگی‌های لگاریتم، آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از روابط $\log_a x = \log_a y$ یا $\log_a x = b$ برسیم. سپس با استفاده از روابط زیر مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم. مقادیر به دست آمده وقتی قابل قبول هستند که در دامنه معادله واقع باشند و در واقع در معادله صدق کنند.

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log (81)^k \Rightarrow \log 3 \sqrt[4]{3} = \log (81)^k$$

$$\Rightarrow (81)^k = 3 \sqrt[4]{3} \Rightarrow (3^4)^k = 3 \times 3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 3^{4k} = 3^{\frac{5}{4}} \Rightarrow 4k = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{16} \Rightarrow \log_2 \frac{5}{k} \stackrel{k=\frac{5}{16}}{=} \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

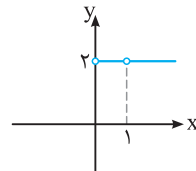
۱۵۲۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

ابتدا با استفاده از روابط $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ و $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

ضابطه تابع را کمی ساده می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x}^{\frac{1}{\log_4 x}} = \sqrt{x}^{\log_x 4} = 4^{\log_x \sqrt{x}} = 4^{\log_x x^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = 2$$

بدیهی است که باید $x > 0$ و $x \neq 1$. پس باید نمودار تابع $y = 2$ را با شرط $x > 0$ و $x \neq 1$ رسم کنیم:



۱۵۲۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

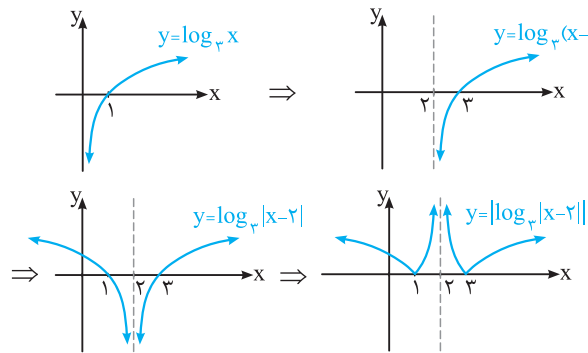
نکته: اگر U تابعی از x و k عددی طبیعی و $a > 0, a \neq 1$ باشد، در حالت کلی داریم:

$$\log_a U^{2k} = 2k \log_a |U|$$

$$f(x) = \left| \log_9 \left(\frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) \right| = \left| \log_{3^2} (x-2)^{-2} \right| = \left| -\log_3 |x-2| \right| = \left| \log_3 |x-2| \right| \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

پس $f(x) = \left| \log_3 |x-2| \right|$

برای رسم نمودار تابع f ، ابتدا نمودار $y = \log_3 x$ را رسم کرده و سپس آن را دو واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم، پس از آن قرینه بخش‌هایی از نمودار را که در سمت راست خط $x = 2$ قرار دارد، در سمت چپ این خط نیز رسم می‌کنیم. در نهایت بخش‌هایی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



۱۵۲۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x \\ g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

از طرفی دامنه هر دو تابع برابر بازه $(0, +\infty)$ است.

چون دامنه دو تابع با هم برابر بوده و به ازای هر عدد x از دامنه مشترک آن‌ها، ضابطه آن‌ها نیز یکسان است، پس این دو تابع با هم برابرند، لذا نمودار آن‌ها بر هم منطبق است.

فصل ۸ توابع نمایی و لگاریتمی

قسمت سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

این قسمت مهم‌ترین قسمت لگاریتمه. تمام فرمولای لگاریتم تو این قسمت اومده. معادلات لگاریتمی و کاربردش هم تو این قسمت اومده. بیش‌تر تستای کنکورم از این مبحث مطرح میشه. واسه این‌که فرمولای لگاریتم قوی تو ذهنت بشینه، هر فرمولی رو که آوردیم، بلافاصله مثالی ازش زدیم تا کاربرد فرمول رو تو دل مثلاً یاد بگیریم.



قوانین و ویژگی‌های لگاریتم

برای حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، شیمی، پزشکی، زمین‌شناسی و ... که در آن‌ها لگاریتم به کار گرفته می‌شود، نیازمند استفاده از قوانینی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. بر این اساس در این قسمت به بیان و اثبات قوانین و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم.

قانون ۱: برای هر عدد حقیقی a که $a > 0$ و $a \neq 1$ ، داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad , \quad \log_a a = 1$$

اثبات: از آنجایی که $a^0 = 1$ ، پس $\log_a 1 = 0$ و چون $a^1 = a$ ، پس $\log_a a = 1$

مثال: حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

$$(A) \log_8 (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

$$(B) \log_3 ((1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{8})$$

$$\log_8 (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \log_8 (4 - 3) = \log_8 1 = 0$$

پاسخ: (A)

$$\log_3 ((1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{8}) = \log_3 (1 + 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = \log_3 3 = 1$$

(B)

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

قانون ۲: اگر A و B دو عدد مثبت و $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_a A = x$ و $\log_a B = y$. پس:

$$\begin{cases} \log_a A = x \Rightarrow A = a^x \\ \log_a B = y \Rightarrow B = a^y \end{cases} \Rightarrow AB = a^{x+y} \Rightarrow \log_a AB = x + y \Rightarrow \log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

نتیجه: قانون ۲ قابل تعمیم است، یعنی اگر A_1, A_2, \dots, A_n اعدادی مثبت و $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آن‌گاه:

$$\log_a A_1 A_2 \cdots A_n = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \cdots + \log_a A_n$$

تست: حاصل $\log_{10} 1 + \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \cdots + \log_{10} 10$ کدام است؟

$$10! (4)$$

$$10 (3)$$

$$1 (2)$$

$$\text{صفر} (1)$$

پاسخ: بنابر نتیجه قانون ۲ می‌توان نوشت:

$$\log_{10} 1 + \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \cdots + \log_{10} 10 = \log_{10} (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10) = \log_{10} 10! = 1 \Rightarrow \text{گزینه (2) صحیح است.}$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

قانون ۳: اگر A و B دو عدد مثبت و $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

این قانون و قانون‌های دیگر نیز مانند قانون ۲ اثبات می‌شوند. لذا از اثبات آن‌ها می‌گذریم.

$$\log 5 = 1 - \log 2 \quad , \quad \log 2 = 1 - \log 5$$

نتیجه: همواره داریم:

مثال: اگر $\log 5 = b$ و $\log 7 = a$ باشد، حاصل $\log \frac{7}{5}$ را بر حسب a و b بیابید.

$$\log \frac{7}{5} = \log 7 - \log 5 = \log 7 - (1 - \log 5) = \log 7 + \log 5 - 1 = a + b - 1$$

پاسخ:

قانون ۴: اگر A و a مثبت باشند و $a \neq 1$ ، آن‌گاه برای هر دو عدد حقیقی m و n ($m \neq 0$) داریم:

$$\log_a A^n = n \log_a A, \quad \log_{a^m} A = \frac{1}{m} \log_a A$$

نتیجه اگر A و a دو عدد مثبت باشند و $a \neq 1$ ، برای هر دو عدد حقیقی m و n ($m \neq 0$)، با ترکیب دو رابطه قانون (۴) داریم:

$$\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m} \log_a A$$

راستی از این فرمول نتیجه می‌شود که $\log_{a^n} A^n = \log_a A$. یعنی همیشه می‌توانیم هم‌زمان عبارت جلوی لگاریتم و پایه رو به توان عدد مشترکی برسوانیم.

مثلاً $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{2} = \log_{27} 4$. فومیروی یکبار کردیم $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt{3}$ رو هم‌زمان به توان ۶ رساندیم.

تست: حاصل عبارت $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{25} - \log_{\sqrt{3}} 125$ کدام است؟

(۱) $\frac{64}{9}$ (۲) $\frac{49}{9}$ (۳) $\frac{45}{7}$ (۴) $\frac{65}{7}$

$$\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{25} = \log_{\sqrt{5}} 5^{\frac{2}{3}} = \log_{\sqrt{5}} 5^{\frac{2}{3} \times \frac{2}{2}} = \log_{\sqrt{5}} 5^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \log_{\sqrt{5}} 5 = \frac{4}{3} \log_{\sqrt{5}} 5^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{2}{3}$$

پاسخ:

$$\log_{\sqrt{3}} 125 = \log_{\sqrt{3}} 5^3 = \log_{\sqrt{3}} \frac{125}{1000} = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8} = \log_{\sqrt{3}} 2^{-3} = -3 \log_{\sqrt{3}} 2 = -3 \times \frac{1}{2} \log_3 2 = -\frac{3}{2} \log_3 2 = -6 \times \frac{1}{2} = -6$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{25} - \log_{\sqrt{3}} 125 = \frac{2}{3} - (-6) = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

تست: اگر $4a^2 + 9b^2 = 13ab$ ، حاصل $\log \frac{2a+3b}{5}$ برابر کدام است؟

(۱) $\log a + \log b$ (۲) $\frac{1}{2} (\log a + \log b)$ (۳) $\log 2a + \log 3b$ (۴) $\frac{1}{2} (\log 2a + \log 3b)$

$$\log \frac{2a+3b}{5} = \frac{1}{2} \log \frac{(2a+3b)^2}{25} = \frac{1}{2} \log \frac{4a^2 + 9b^2 + 12ab}{25} = \frac{1}{2} \log \frac{13ab + 12ab}{25} = \frac{1}{2} \log \frac{25ab}{25} = \frac{1}{2} \log ab = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

به کمک نکته بعد می‌توانیم تکرار رقمی اعداد فیلی بزرگ رو بشماریم.

نکته فرض کنید n یک عدد حسابی و n_1, n_2, \dots و ... رقم باشند، در این صورت:

(آ) اگر $\log A = n/n_1 n_2 \dots$ ، آن‌گاه عدد A ، $n+1$ رقم دارد.

(ب) اگر $\log A = -n/n_1 n_2 \dots$ ، آن‌گاه در عدد A ، بعد از ممیز، n رقم صفر قرار دارد.

قسمت (آ) را اثبات می‌کنیم:

$$\log A = n/n_1 n_2 \dots \Rightarrow A = 10^{n/n_1 n_2 \dots}$$

$$10^n < 10^{n/n_1 n_2 \dots} < 10^{n+1} \Rightarrow 10^n < A < 10^{n+1} \Rightarrow \text{عدد } A, n+1 \text{ رقم دارد.}$$

به طور مشابه قسمت (ب) اثبات می‌شود.

تست: اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، عدد 2^{80} چند رقم دارد؟

(۱) ۸۰ (۲) ۸۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

$$\log A = \log 2^{80} = 80 \log 2 = 80 \times 0/301 = 24/08$$

پاسخ: فرض کنیم $A = 2^{80}$ ، داریم:

بنابر نکته قبل، عدد $A = 2^{80}$ ، ۲۵ رقمی بوده و گزینه (۴) صحیح است.

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

قانون ۵ (قانون تغییر مبنا): اگر A, a, b مثبت و $a \neq 1$ و $b \neq 1$ باشند، آن‌گاه:

قانون تغییر مبنا جزء قوانین فیلی مهمه لگاریتمه، وقتی ارزش استفاده می‌شه که مبنای لگاریتمی که تو فرض دادن با مبنای لگاریتمی که می‌فوان با هم برابر نباشه.

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

نتیجه ۱ اگر $a, b > 0$ ، $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ، آن‌گاه داریم:

این قانون بیان می‌کند که اگر جای مبنا و عبارت جلوی لگاریتم را عوض کنیم، لگاریتم عکس می‌شود. به طور مثال اگر $\log_3 2 = A$ ،

$$\log_2 3 = \frac{1}{A}$$

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

نتیجه ۲ اگر a, b, c مثبت و $a \neq 1$ و $b \neq 1$ و $c \neq 1$ ، آن‌گاه:

تست: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، حاصل $\log_6 45$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{2b - 2a}{a + b} & (۴) & \frac{b - a}{a + b} & (۳) \\ \frac{a - b + 1}{a + b} & (۲) & \frac{2b - a + 1}{a + b} & (۱) \end{array}$$

پاسخ: از قبل می‌دانیم $\log 5 = 1 - \log 2$ ، حال با استفاده از تغییر مبنا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \log_6 45 &= \frac{\log_{10} 45}{\log_{10} 6} = \frac{\log 45}{\log 6} = \frac{\log 9 \times 5}{\log 2 \times 3} = \frac{\log 9 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{\log 3^2 + \log 5}{\log 2 + \log 3} \\ &= \frac{2 \log 3 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 \log 3 + 1 - \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{2b + 1 - a}{a + b} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.} \end{aligned}$$

تست: اگر $\log_a a^2 b = A$ ، حاصل $\log_{b^2 a} b$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1 - A}{3 - 2A} & (۴) & \frac{1 - 2A}{1 - 3A} & (۳) \\ \frac{1 - 2A}{2 - 3A} & (۲) & \frac{1}{A} & (۱) \end{array}$$

پاسخ:

$$\log_a a^2 b = A \Rightarrow \log_a a^2 + \log_a b = \frac{1}{A} \Rightarrow 2 + \log_a b = \frac{1}{A} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{A} - 2 \Rightarrow \log_a b = \frac{1 - 2A}{A} \quad (*)$$

$$\log_{b^2 a} b \stackrel{\text{تغییر مبنا}}{=} \frac{\log_a b}{\log_a b^2 a} = \frac{\log_a b}{\log_a b^2 + \log_a a} = \frac{\log_a b}{2 \log_a b + 1}$$

$$\frac{(*)}{\frac{1 - 2A}{A}} = \frac{\frac{1 - 2A}{A}}{\frac{2 - 4A}{A} + 1} = \frac{1 - 2A}{2 - 3A} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

قانون ۶: اگر a, b, c مثبت و $c \neq 1$ ، آن‌گاه:

آه هواسی این قانون رو اثبات کنی، کافیه از طرفین تساوی، لگاریتم در پایه c بگیری.

$$a^{\log_a A} = A$$

نتیجه اگر A و a مثبت و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

تست: حاصل عبارت $\sqrt{2 \log_{49} 2 + 3 \log_{49} 3}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 108 & (۴) & 54 & (۳) \\ 6\sqrt{3} & (۲) & 6 & (۱) \end{array}$$

پاسخ: ابتدا به کمک روابط $\log_a A^n = n \log_a A$ و نیز $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ ، توان عبارت را ساده می‌کنیم:

$$2 \log_{49} 2 + 3 \log_{49} 3 = \log_{49} 2^2 + \log_{49} 3^3 = \log_{49} 4 + \log_{49} 27 = \log_{49} 4 \times 27 = \log_{49} 108$$

حال می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2 \log_{49} 2 + 3 \log_{49} 3} = \sqrt{\log_{49} 108} \stackrel{\text{قانون ۶}}{=} 108^{\log_{49} \sqrt{}} = 108^{\frac{1}{2} \log_{49} \sqrt{}} = 108^{\frac{1}{2}} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

پیش‌تر تستای لگاریتم از معادلات لگاریتم اومده، دلیلش اینه که واسه حل معادله هم باید قوانین لگاریتمو بلد باشی و هم حل معادله رو.

معادلات لگاریتمی

معادلاتی که فقط شامل عبارت‌های لگاریتمی با ضرایب حقیقی باشند، معادلات لگاریتمی نام دارند. به طور مثال هر یک از معادلات زیر، یک معادله لگاریتمی هستند:

$$\log_{\Delta}(x^2 - 3x) - \log_{\Delta}(x - 1) = 3, \log_x(x - 5) = 2$$

نکته اگر $a > 0, a \neq 1$ و x و y مثبت باشند، آن‌گاه بر اساس تعریف لگاریتم و نیز خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی داریم:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

روش حل معادلات لگاریتمی: برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا در صورت لزوم، طرفین معادله را به کمک قوانین و ویژگی‌های لگاریتم، آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از روابط $\log_a x = \log_a y$ یا $\log_a x = b$ برسیم. سپس به کمک نکته فوق، مقادیر مجهول را می‌یابیم. مقادیر به‌دست‌آمده وقتی قابل قبول هستند که در دامنه معادله واقع باشند. به عبارت دیگر این مقادیر وقتی جواب معادله هستند که به ازای آن‌ها، هیچ‌یک از عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها و نیز مبنای منفی نباشند و مبنای نیز برابر ۱ نشوند.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

(آ) $\log_7(x^2 - 7x + 1) = \log_7(6 - 3x)$

(ب) $\log_9(x - 4) = 1 - \log_9 2$

(پ) $\log_x(x + 2) = \log_x(4 - x) + 1$

(ت) $(\log_7 x)^2 - 9 \log_8 x = 4$

پاسخ: (آ) $\log_7(x^2 - 7x + 1) = \log_7(6 - 3x) \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 6 - 3x \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = -1$

به ازای $x = 5$ ، عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شوند. چون لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود، پس $x = 5$ قابل قبول نیست. اما $x = -1$ در معادله صدق می‌کند و لذا تنها جواب معادله است.

(ب) $\log_9(x - 4) = 1 - \log_9 2 \Rightarrow \log_9(x - 4) = \log_9 2 - \log_9 2 \Rightarrow \log_9(x - 4) = \log_9 \frac{2}{2}$

می‌دانیم $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m} \log_a A$. به خصوص اگر $n = m$ باشد، داریم $\log_{a^n} A^n = \log_a A$. بنابراین $\log_9 \frac{2}{2} = \log_9 \frac{9}{9}$.

(پ) $\log_9(x - 4) = \log_9 \frac{2}{2} \Rightarrow \log_9(x - 4) = \log_9 \frac{9}{9} \Rightarrow x - 4 = \frac{9}{9} \Rightarrow x = \frac{25}{9}$

پس: $x = \frac{25}{9}$ در دامنه معادله قرار دارد و در نتیجه جواب معادله است.

(ت) $\log_x(x + 2) = \log_x(4 - x) + 1 \Rightarrow \log_x(x + 2) = \log_x(4 - x) + \log_x x \Rightarrow \log_x(x + 2) = \log_x(4 - x)x$

$\Rightarrow x + 2 = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = 2$
به ازای $x = 1$ ، مبنای لگاریتم‌ها برابر یک می‌شود که نادرست است. پس $x = 1$ قابل قبول نیست. اما $x = 2$ در دامنه معادله قرار دارد و در آن صدق می‌کند و لذا تنها جواب معادله است.

(ت) $(\log_7 x)^2 - 9 \log_8 x = 4 \Rightarrow (\log_7 x)^2 - 9 \log_9 x - 4 = 0 \Rightarrow (\log_7 x)^2 - 3 \log_7 x - 4 = 0$

$$\xrightarrow{\log_7 x = t} t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ \text{یا} \\ t = -1 \end{cases} \xrightarrow{t = \log_7 x} \begin{cases} \log_7 x = 4 \Rightarrow x = 16 \\ \log_7 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{7} \end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست‌آمده در دامنه معادله قرار دارند و لذا هر دوی آن‌ها قابل قبول هستند.

تست: اگر $\log(4/5 - x) = \log 4/5 - \log x$ ، آن‌گاه $\log_{\sqrt{2}}(x - \frac{11}{4})$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: $\log(4/5 - x) = \log 4/5 - \log x \Rightarrow \log(4/5 - x) = \log \frac{4/5}{x}$

$\Rightarrow 4/5 - x = \frac{4/5}{x} \Rightarrow \frac{4}{5} - x = \frac{9}{2} - x = \frac{9}{2x} \xrightarrow{\times 2x} 9x - 2x^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$ یا $x = \frac{3}{2}$

اگرچه هر دو جواب به‌دست‌آمده قابل قبول هستند (چرا؟) اما فقط به ازای $x = 3$ ، عبارت $x - \frac{11}{4}$ مثبت است. پس:

گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow \log_{\sqrt{2}}(x - \frac{11}{4}) \xrightarrow{x=3} \log_{\sqrt{2}}(3 - \frac{11}{4}) = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{4} = \frac{-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -4$

تست: از معادلات $\log_y x + \log_x y = 2$ و $\frac{1}{4} = 2^{x^2} \times 4^{\frac{1}{2}y-7}$ ، مقدار y کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

$$2^{x^2} \times 4^{\frac{1}{2}y-7} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{x^2} \times 2^{y-14} = 2^{-2} \Rightarrow 2^{x^2+y-14} = 2^{-2} \Rightarrow x^2+y-12=0 \quad (1)$$

پاسخ:

$$\log_y x + \log_x y = 2 \xrightarrow{\log_y x=t} t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \log_y x = 1 \Rightarrow x=y \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow (y-3)(y+4) = 0 \Rightarrow y=3 \text{ یا } y=-4$$

واضح است که $y = -4$ قابل قبول نیست. زیرا در دامنه معادله قرار ندارد و بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

کاربردهای لگاریتم

مبحث کاربرد لگاریتم از پارسل تو کتاب اومده سالی که مزین به قروم مبارک شما اولین یازدهمیا.

لگاریتم علاوه بر ساده نمودن محاسبات، کاربردهای وسیعی در زندگی روزمره دارد. امروزه از لگاریتم در حسابداری و در تعیین بهره مرکب و نیز مسائل مالی استفاده می‌شود. از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، کاربرد آن در علم زلزله‌شناسی است و به کمک آن می‌توان مقدار انرژی آزاد شده توسط زلزله و نیز کانون زلزله را تعیین نمود. کاربرد لگاریتم در شیمی تجزیه برای محاسبه pH محلول‌ها قابل چشم‌پوشی نیست. اصطلاح «دسی‌بل» که برای بیان شدت صوت به کار می‌رود و در بسیاری از مباحث فیزیک و موسیقی و نیز به هنگام استفاده از اعمال ضبط و افکت در استودیوهای موسیقی کاربرد دارد، از یک محاسبه ساده لگاریتمی به دست می‌آید. از معروف‌ترین کاربردهای لگاریتم، کاربرد آن در مسائل رشد، مثل مسائل رشد جمعیت انسان‌ها و جانداران و مسائل زوال مثل مسائل نیمه‌عمر عنصرها است. لگاریتم در علوم دیگر مانند اخترشناسی، دریانوردی و ... نیز کاربردهای فراوانی دارد. در ادامه به برخی از این کاربردها می‌پردازیم.

کاربرد لگاریتم در مسائل نیمه‌عمر

به مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار معینی از یک عنصر به نصف مقدار اولیه خود کاهش یابد، نیمه‌عمر آن عنصر گفته می‌شود. اگر نیمه‌عمر یک عنصر برابر n باشد و به مقدار m_0 واحد جرم از این عنصر داشته باشیم، جرم باقی‌مانده از این عنصر بعد از گذشت زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m(t) = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{n}}$$

تست: نیمه‌عمر یک ماده هسته‌ای ۲۰ سال است. اگر نمونه‌ای از آن دارای ۸۰ گرم باشد، تقریباً پس از چند سال ۸ گرم از آن باقی می‌ماند؟

(برگرفته از کتاب درسی)

 $(\log 2 \approx 0.301)$

۶۶/۴ (۴)

۴۰/۸ (۳)

۳۰/۵ (۲)

۱۰ (۱)

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{n}} \Rightarrow m(t) = 80 \times 2^{-\frac{t}{20}} \Rightarrow 8 = 80 \times 2^{-\frac{t}{20}} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{20}} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \log 2^{-\frac{t}{20}} = \log 10^{-1} \Rightarrow -\frac{t}{20} \times \log 2 = -1 \Rightarrow t = \frac{20}{\log 2} \approx \frac{20}{0.301} \Rightarrow t \approx 66.4$$

یعنی پس از حدود ۶۶/۴ سال، ۸ گرم از ماده هسته‌ای باقی می‌ماند. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

کاربرد لگاریتم در زلزله‌شناسی

افراد زیادی از کشورهای مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری و مقایسه قدرت زلزله تهیه کرده‌اند. یکی از این افراد «چارلز ریشر» - زلزله‌شناس آمریکایی - در سال ۱۹۳۵، یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش قدرت زلزله تهیه نمود که هنوز مورد استفاده قرار می‌گیرد و به دلیل اهمیت آن، به نام خود او معروف شده است.

نکته اگر بزرگی زمین‌لرزه برابر M در مقیاس ریشر باشد، آن‌گاه انرژی آزاد شده در مقیاس ارگ (Erg) که آن را با E نمایش می‌دهیم، از رابطه

مقابل به دست می‌آید:

$$\log E = 11.8 + 1.5M$$

تست: در سال ۱۳۶۹، بزرگی زمین‌لرزه‌ای که در رودبار رخ داد، ۷/۲ در مقیاس ریشر گزارش شد. مقدار انرژی آزاد شده در این زمین‌لرزه در

(برگرفته از کتاب درسی)

مقیاس ارگ چقدر بوده است؟

۱۰^{۲۶/۲} (۴)۱۰^{۲۲/۶} (۳)۱۰^{۱۸/۲} (۲)۱۰^{۱۶} (۱)

پاسخ: مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را به کمک رابطه مذکور می‌یابیم:

$$\log E = 11.8 + 1.5M \xrightarrow{M=7.2} \log E = 11.8 + (1.5 \times 7.2) = 11.8 + 10.8 = 22.6 \Rightarrow E = 10^{22.6} \text{ Erg} \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

خلاصه فصل هشتم: قسمت سوم: «ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی»

قوانین و ویژگی‌های لگاریتم

۱) $\log_a a = 1$

۲) $\log_a 1 = 0$

۳) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

۴) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

۵) $\log_a^m A^n = \frac{n}{m} \log_a A$

۶) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (تغییر مبنا)

۷) $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$

۸) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

۹) $a^{\log_a A} = A$

۱۰) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$\log 2 = 1 - \log 5$ یا $\log 5 = 1 - \log 2$

نکته از ویژگی (۴) نتیجه می‌شود که:

نکته اگر $a > 0, a \neq 1$ و x و y مثبت باشند، آن‌گاه داریم:

$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ ، $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

روش حل معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا در صورت لزوم، طرفین معادله را به کمک قوانین و ویژگی‌های لگاریتم، آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از روابط $\log_a x = \log_a y$ یا $\log_a x = b$ برسیم. سپس به کمک نکته فوق، مقادیر مجهول را می‌یابیم. مقادیر به دست آمده وقتی قابل قبول هستند که در دامنه معادله واقع باشند. به عبارت دیگر این مقادیر وقتی جواب معادله هستند که به ازای آن‌ها، هیچ‌یک از عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها و نیز مبناها منفی نباشند و مبناها نیز برابر ۱ نشوند.

کاربردهای لگاریتم

لگاریتم علاوه بر ساده نمودن محاسبات، کاربردهای وسیعی در زندگی روزمره دارد. در زیر به برخی از این کاربردها اشاره می‌شود:

۱) کاربرد لگاریتم در مسائل نیمه‌عمر

به مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار معینی از یک عنصر به نصف مقدار اولیه خود کاهش یابد، نیمه‌عمر آن عنصر گفته می‌شود. اگر نیمه‌عمر یک عنصر برابر n باشد و به مقدار m_0 واحد جرم از این عنصر داشته باشیم، جرم باقی‌مانده از این عنصر بعد از گذشت زمان t از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$m(t) = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{n}}$$

۲) کاربرد لگاریتم در زلزله‌شناسی

اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، آن‌گاه انرژی آزاد شده در مقیاس ارگ (Erg) که آن را با E نمایش می‌دهیم، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\log E = 11.8 + 1.5M$$