Mathematics

فصل ۱

قسمت اوّل
مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مفهوم مجموعه

در ابتدای این درس، قصد داریم مطالب و مفاهیمی را در مورد مجموعه‌ها که در سال نهم با آن آشنا شده‌اید، یادآوری کنیم:
در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای **مشخص** و دوبه‌دو **متمایز** (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود.
به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

قرارداد: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$
به‌عنوان مثال، اگر $A = \{1, 2, 5\}$ ، آن‌گاه $5 \in A$ و $3 \notin A$

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

تذکر مجموعهٔ تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{0\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، اشتباه بگیریم.

مثال: اگر $A = \{-1, 0, \{-1\}, \{0\}, \{\{0\}\}\}$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) $\{\{0\}\} \in A$ ب) $\{-1, 0\} \in A$ پ) $\{\{-1\}\} \notin A$ ت) $\{0\} \notin A$

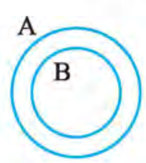
پاسخ: A یک مجموعهٔ ۵ عضوی است که اعضای آن ۱-، ۰، $\{-1\}$، $\{0\}$ و $\{\{0\}\}$ می‌باشند، بنابراین:

آ) درست است. ب) نادرست است. پ) درست است. ت) نادرست است.

دو مجموعهٔ مساوی: دو مجموعهٔ A و B برابرند هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$

نتیجه اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$

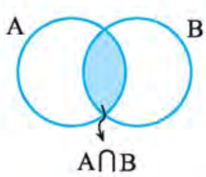
زیرمجموعه: اگر هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$
نمایش $B \subseteq A$ با نمودار وِن به‌صورت مقابل است:



نکته تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر 2^n می‌باشد. به‌عنوان مثال، یک مجموعهٔ ۳ عضوی، $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.

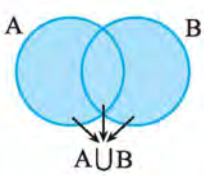
اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A , x \in B\}$$



اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعهٔ A و B را نشان می‌دهد:

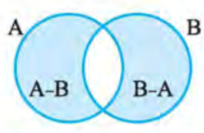
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



تفاضل دو مجموعه: مجموعهٔ $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند.

$$A - B = \{x \mid x \in A , x \notin B\}$$

در نمودار مقابل، مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ رنگی هستند:



مثال: اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۱\le x\le ۴\}$ و $B=\{۲x \mid x\in A, ۰<x\le ۳\}$، مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۱\le x\le ۴\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\} \quad , \quad B=\{۲x \mid x\in A , ۰<x\le ۳\}=\{۲,۴,۶\}$$

$$\Rightarrow A\cup B=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۶\} \quad , \quad A\cap B=\{۲,۴\}$$

$$\Rightarrow (A\cup B)-(A\cap B)=\{-۱,۰,۱,\cancel{۲},۳,\cancel{۴},۶\}-\{۲,۴\}=\{-۱,۰,۱,۳,۶\}$$

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C روابط زیر برقرار است:

$$۱)\begin{cases}A\cup A=A\\ A\cap A=A\end{cases} \qquad ۲)\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\ A\cap B=B\cap A\end{cases}$$

$$۳)\begin{cases}A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\end{cases} \qquad ۴)\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$$

$$۵)\begin{cases}A,B\subseteq A\cup B\\ A\cap B\subseteq A,B\end{cases} \qquad ۶)\ A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=B\\ A\cap B=A\end{cases}$$

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح که به ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\} \quad , \quad \mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\} \quad , \quad \mathbb{Z}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$$

مجموعهٔ اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\ne ۰\right\}$$

تذکر اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد یا بسط اعشاری، نمایش داده می‌شوند. به‌طور مثال داریم $\frac{۳}{۵}=۰/۶$ که در آن $\frac{۳}{۵}$ کسر متعارفی و $۰/۶$ نماد اعشاری این عدد گویا است.

نمایش اعشاری عددهای گویا

نمایش اعشاری عددهای گویا به دو صورت است: ۱- مختوم (یا متناهی) ۲- نامتناهی و متناوب

۱) مختوم (تحقیقی یا پایان‌پذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده به صفر می‌رسد و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۹}{۲۰}$ مختوم هستند، زیرا در مخرج این کسرها فقط عامل ۲ یا ۵ وجود دارد و داریم $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$، $\frac{۱}{۵}=۰/۲$ و $\frac{۹}{۲۰}=۰/۴۵$

۲) متناوب (پایان‌ناپذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها حداقل یک شمارندهٔ اول به جز ۲ و ۵ وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده هرگز به صفر نمی‌رسد و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{۴}{۳۳}$ و $\frac{۷}{۶}$ متناوب هستند، زیرا در مخرج این کسرها حداقل یک شمارندهٔ اول به‌جز ۲ و ۵ وجود دارد و داریم:

$$\frac{۴}{۳۳}=۰/۱۲۱۲\dots=۰/\overline{۱۲} \quad , \quad \frac{۷}{۶}=۱/۱۶۶۶\dots\dots=۱/۱\overline{۶}$$

مجموعهٔ اعداد گنگ: مجموعهٔ اعدادی را که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد، مجموعهٔ اعداد گنگ می‌نامیم.

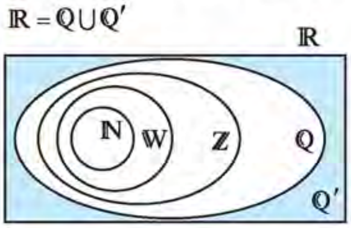
مجموعهٔ اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^C$ نشان می‌دهیم.

نکته در نمایش اعشاری عددهای گنگ، تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار بوده ولی متناوب نیست. به عنوان مثال، اعداد $\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳\dots$ و $۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰\dots$ که نمایش اعشاری آن‌ها بی‌پایان و غیرمتناوب است، اعدادی گنگ هستند.

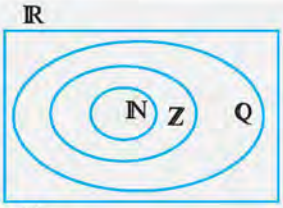
مجموعهٔ اعداد حقیقی: اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$$

رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ می‌باشد.

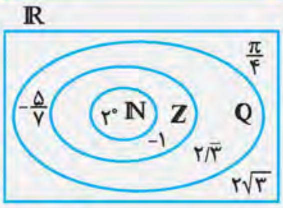


مثال: اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.



$$۲\sqrt{۳}\ ,\ -۱\ ,\ -\frac{۵}{۷}\ ,\ \frac{\pi}{۴}\ ,\ ۲^{\circ}\ ,\ ۲/۳۳۳...$$

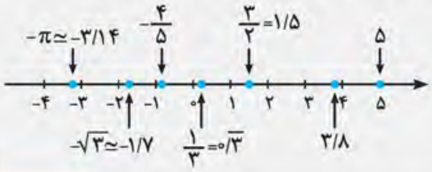
پاسخ: $۱=۲^{\circ}$ عددی طبیعی، $۱-$ عددی صحیح، $-\frac{۵}{۷}$ و $۲/\overline{۳}$ اعدادی گویا و $۲\sqrt{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ اعدادی گنگ هستند. بنابراین:



نکته هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و هم‌چنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال: هر یک از اعداد $۳/۸$، $-\pi$، $\frac{۳}{۲}$، ۵، $-\sqrt{۳}$، $-\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند؟

پاسخ:



اعداد $-\sqrt{۳}$ و $-\pi$ گنگ هستند.

بازه (فاصله)

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه یا برشی از محور اعداد حقیقی باشند، «بازه» یا «فاصله» نام دارند. در ادامه به معرفی انواع بازه‌ها می‌پردازیم.

بازه‌های محدود

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۱- و ۲ به همراه خود این دو عدد، به‌صورت $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\le x\le ۲\}$ است. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی از نماد ساده‌تری استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ A که شامل هر دو نقطهٔ انتهایی خود می‌باشد را به‌صورت $[-۱,۲]$ می‌نویسیم و آن را بازهٔ بسته از ۱- تا ۲ می‌نامیم.

حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه، یعنی ۱- و ۲ را حذف کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ای مانند $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱<x<۲\}$ به‌دست می‌آید که آن را بازهٔ باز بین ۱- و ۲ می‌نامیم و با نماد $(-۱,۲)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین بازه‌هایی مثل $[۱,۴)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱\le x<۴\}$ و $(۲,۵]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۲<x\le ۵\}$ که فقط شامل یکی از نقاط انتهایی خود باشد را بازه‌های نیم‌باز (نیم‌بسته) می‌نامیم.

در حالت کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، آن‌گاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول زیر خلاصه شده است:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$	a b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}$	a b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$	a b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$	a b

مثال: کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست می‌باشند؟ چرا؟

آ) $\frac{۳}{۲}\in(\frac{۵}{۴},\frac{۸}{۵}]$ ب) $\{-۱,۰\}\subseteq(-۲,۱)$ پ) $-\sqrt{۵}\in[-۳,-۲)$ ت) $[-۱,۱]\subseteq(-۱,۱)$

پاسخ: آ) درست است، زیرا:

$$\frac{۵}{۴}=۱/۲۵\ ,\ \frac{۸}{۵}=۱/۶\ ,\ \frac{۳}{۲}=۱/۵\Rightarrow\frac{۳}{۲}\in(\frac{۵}{۴},\frac{۸}{۵}]$$

ب) درست است، زیرا بازهٔ $(-۲,۱)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۱ می‌باشد، پس بازهٔ $(-۲,۱)$ شامل دو عدد ۱- و ۰ می‌باشد. پس داریم:

$$\{-۱,۰\}\subseteq(-۲,۱)$$

پ) درست است، زیرا:

$$-\sqrt{۵}\simeq-۲/۲\Rightarrow-\sqrt{۵}\in[-۳,-۲)$$

ت) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $-۱\in[-۱,۱]$ ولی $-۱\notin(-۱,۱)$

مثال: اگر $A=[-۲,۳)$ و $B=(۰,۴)$ باشد:

آ) نمایش مجموعه‌ای A و B را بنویسید.

ب) نمایش هندسی هر یک از مجموعه‌های A و B را رسم کنید.

پ) $A\bigcap B$، $A\bigcup B$ و $A-B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: آ) $A=[-۲,۳)=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x<۳\}\ ,\ B=(۰,۴)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۴\}$

ب)

پ) مجموعه‌های A و B را روی یک محور نمایش می‌دهیم و سپس اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$A\bigcup B=[-۲,۴)$

$A\bigcap B=(۰,۳)$

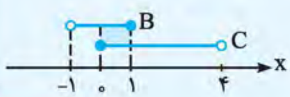
$A-B=[-۲,۰]$

تست: اگر $A=[-۲,۱)$ ، $B=(-۱,۱]$ و $C=[۰,۴)$ باشند، مجموعهٔ $A-(B\bigcap C)$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]$ ۲) $[-۲,-۱)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,۰)$

پاسخ:

گزینهٔ (۴) صحیح است. $\Leftarrow$ $B\bigcap C=[۰,۱]\Rightarrow A-(B\bigcap C)=[-۲,۱)-[۰,۱]=[-۲,۰)$



طول و نقطه میانی در بازه‌های محدود (ویژهٔ علاقمندان)

ابتدای بازه − انتهای بازه = طول بازه ، $\dfrac{\text{انتهای بازه + ابتدای بازه}}{۲}$ = طول نقطهٔ میانی

تست: اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲\le -x+۳\le ۵\}$ باشد، طول بازهٔ $A\bigcup B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $۲\le -x+۳\le ۵$، حدود x و درنتیجه مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$$۲\le -x+۳\le ۵ \xrightarrow{-۳} -۱\le -x\le ۲ \xrightarrow{\div(-۱)} -۲\le x\le ۱ \Rightarrow B=[-۲,۱]$$

گزینهٔ (۱) صحیح است. $\Leftarrow ۴=(-۲)-۲=$ ابتدای بازه − انتهای بازه = طول بازهٔ $A\bigcup B$ $\Leftarrow$ $A\bigcup B=[-۱,۲]\bigcup[-۲,۱]=[-۲,۲]$

بازه‌های بی‌کران (نامحدود)

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ به صورت $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le ۲\}$ است. از نماد $(-\infty,۲]$ برای نمایش مجموعهٔ A استفاده می‌کنیم و آن را بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم. اگر حداقل در یک طرف بازه یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ به‌کار رفته باشد، آن بازه را بی‌کران (نامحدود) می‌خوانیم.

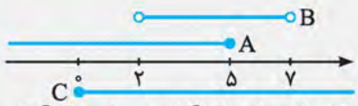
فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. انواع بازه‌های نامحدود، نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid x> a\}$	$(a,+\infty)$	باز
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid x< a\}$	$(-\infty,a)$	باز

نکته بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

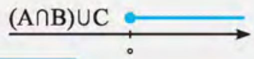
مثال: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le ۵\}$ ، $B=(۲,۷)$ و $C=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge ۰\}$ باشد، حاصل $(A\cap B)\cup C$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

پاسخ: هر یک از مجموعه‌های A ، B و C را روی یک محور مشخص می‌کنیم و با توجه به آن، مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ را به‌صورت بازه می‌نویسیم:



$$A\cap B=(-\infty,۵]\cap(۲,۷)=(۲,۵]\Rightarrow(A\cap B)\cup C=(۲,۵]\cup[۰,+\infty)=[۰,+\infty)$$

نمایش هندسی مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ به‌صورت مقابل است:



تست: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲<x\le ۳\}$ ، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{x}{۲}>۱\}$ و $C=[-۴,+\infty)$ باشند، مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: مجموعهٔ B از حل نامعادلهٔ $-\frac{x}{۲}>۱$ به‌دست می‌آید:

$$-\frac{x}{۲}>۱\xrightarrow{\times ۲}-x>۲\xrightarrow{\div(-۱)}x<-۲\Rightarrow B=(-\infty,-۲)$$

$$B\cap C=(-\infty,-۲)\cap[-۴,+\infty)=[-۴,-۲)\ ,\ A=(-۲,۳]\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(-۲,۳]\cup[-۴,-۲)=[-۴,۳]-\{-۲\}$$

بنابراین مجموعهٔ اعداد صحیح واقع در مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ به صورت زیر است:

$\{-۴,-۳,-۱,۰,۱,۲,۳\}\Rightarrow$ تعداد اعداد صحیح $=۷\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: اگر $A=[-۱,۴]$ ، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-x+a}{۲}\le ۳\}$ ، $C=[۰,۴]$ و $C=A\cap B$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -۳ ۴) -۲

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $\frac{-x+a}{۲}\le ۳$ ، مجموعهٔ B به‌دست می‌آید:

$$\frac{-x+a}{۲}\le ۳\xrightarrow{\times ۲}-x+a\le ۶\Rightarrow -x\le ۶-a\xrightarrow{\times(-۱)}x\ge a-۶\Rightarrow B=[a-۶,+\infty)\ ,\ A=[-۱,۴]\Rightarrow A\cap B=[a-۶,۴]$$

از طرفی $C=A\cap B=[۰,۴]$ ، پس $a-۶=۰$ و از آن‌جا $a=۶$. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال: اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=[n-۲,n+۳]$ بازه باشد، مجموعه‌های $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۲\cap A_۳$ و $A_۲-A_۳$ را مشخص کنید.

پاسخ: با قرار دادن اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... به جای n در رابطهٔ $A_n=[n-۲,n+۳]$ ، هر یک از بازه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ و ... مشخص می‌شوند:

$$A_۲=[۲-۲,۲+۳]=[۰,۵]\ ,\ A_۳=[۳-۲,۳+۳]=[۱,۶]$$

بازه‌های $A_۲$ و $A_۳$ روی محور به‌صورت روبه‌رو می‌باشند:

$$A_۲\cap A_۳=[۰,۵]\cap[۱,۶]=[۱,۵]$$

$$A_۲-A_۳=[۰,۵]-[۱,۶]=[۰,۱)$$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی و $A_n=[(-۱)^n n,۲n]$ بازه باشد، مجموعهٔ $(A_۱\cup A_۲)-A_۱$ را مشخص کنید.

پاسخ:

$$A_۱=[(-۱)^۱(۱),۲(۱)]=[-۱,۲]\ ,\ A_۲=[(-۱)^۲\times ۲,۲(۲)]=[۲,۴]$$

$$\Rightarrow A_۱\cup A_۲=[-۱,۲]\cup[۲,۴]=[-۱,۴]$$

$$\Rightarrow (A_۱\cup A_۲)-A_۱=[-۱,۴]-[-۱,۲]=(۲,۴]$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ متناهی (باپایان) : مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ متناهی می‌نامیم.

مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که درنظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم. به‌عبارت دیگر مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال: فرض کنید A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و B مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی ۴ باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های A و B متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

پاسخ : نمایش اعضای هر یک از مجموعه های A و B به صورت زیر می‌باشد: $A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ ، $B=\{۴,۸,۱۲,۱۶,...\}$

مجموعهٔ A، ۶ عضو دارد بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است، اما تعداد عضوهای مجموعهٔ B را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس B یک مجموعهٔ نامتناهی است.

قرارداد: اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا تعداد عضوهای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی می‌باشد: $n(\varnothing)=۰$ ، $۰\in\mathbb{W}$

تذکر تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد.

به عنوان مثال، مجموعهٔ درخت‌های شهر تهران، مجموعه‌ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعهٔ متناهی است.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی
ب) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱
پ) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های شمال
ت) $\{x\in\mathbb{Z}\mid -۵<x\le ۴\}$
ث) مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور
ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج

پاسخ : آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی به صورت $A=\{۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱\}$ می‌باشد که یک مجموعهٔ متناهی است.

ب) بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱، یک مجموعهٔ نامتناهی است.

پ) هر چند تعداد درخت‌های جنگل‌های شمال بسیار زیاد است ولی تعداد آن‌ها را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس این مجموعه یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{Z}\mid -۵<x\le ۴\}=\{-۴,-۳,...,۳,۴\}$ یک مجموعهٔ متناهی ۹ عضوی است.

ث) تعداد دانش‌آموزان کشور را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، اگر چه مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور، مجموعه‌ای با تعداد اعضای بسیار زیاد است ولی متناهی می‌باشد.

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,...\}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا تعداد اعضای آن را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان نمود.

تست: اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid ۲-x\le ۲x-۱<۷\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid \frac{۱}{x}<۰\}$ ، در این‌صورت کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟

۱) A
۲) $A-B$
۳) $A\cap B$
۴) $B-A$

پاسخ : هریک از مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$۲-x\le ۲x-۱<۷\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱<۷\Rightarrow ۲x<۸\Rightarrow x<۴\\ ۲-x\le ۲x-۱\Rightarrow ۳\le ۳x\Rightarrow ۱\le x\end{cases}\Rightarrow ۱\le x<۴\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}A=\{۱,۲,۳\}$$

$$\frac{۱}{x}<۰\xrightarrow{۱>۰}x<۰\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}B=\{...,-۳,-۲,-۱\}$$

مجموعه‌های A، $A-B=A$ و $A\cap B=\varnothing$ متناهی و مجموعهٔ $B-A=B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $A\cap B$ و $A-B$، متناهی و مجموعه‌های $A\cup B$ و $B-A$، نامتناهی هستند.

نکته اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه:

۱) اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A حتماً متناهی است.
۲) اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
۴) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B حتماً نامتناهی است.

Mathematics

فصل ۱

قسمت دوم
متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U یا M نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۵ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مرجع را می‌توانیم مجموعهٔ اعداد صحیح درنظر بگیریم:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۵k ، k \in \mathbb{Z}\}$

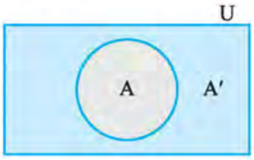
متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن گاه مجموعهٔ $U - A$ را متمم مجموعهٔ A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

A' به بیان مجموعه‌ای به صورت مقابل است:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$$

نمودار وِن مجموعهٔ A' با مجموعهٔ مرجع U به صورت مقابل است:



مثال: فرض کنیم $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۱ \le x \le ۴\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -۵ \le x < ۱\}$ باشند. متمم مجموعه‌های A و B را یک بار نسبت به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ و بار دیگر نسبت به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ مشخص کنید.

پاسخ : متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{Z}$:

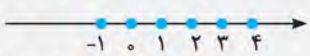
$$A = \{-۱،۰،۱،۲،۳،۴\} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots،-۲،-۱،۰،۱،۲،\dots\} - \{-۱،۰،۱،۲،۳،۴\} = \{\dots،-۳،-۲،۵،۶،۷،\dots\}$$

$$B = [-۵،۱) \Rightarrow B' = \mathbb{Z} - B = \{\dots،-۷،-۶،۱،۲،\dots\}$$

متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{R}$:

محور اعداد حقیقی را در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم. در هر مورد، قسمت‌های باقی مانده از محور، متمم مجموعه‌های A و B خواهد بود.

$A = \{-۱،۰،۱،۲،۳،۴\}$



$$\Rightarrow A' = \mathbb{R} - A = (-\infty،-۱) \cup (-۱،۰) \cup (۰،۱) \cup (۱،۲) \cup (۲،۳) \cup (۳،۴) \cup (۴،+\infty)$$

$B = [-۵،۱)$

$$\Rightarrow B' = \mathbb{R} - B = \mathbb{R} - [-۵،۱) = (-\infty،-۵) \cup [۱،+\infty)$$

مثال: فرض کنید $U = \{۱،۲،۳،۵،۶،۸،۱۰\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{۱،۲،۶،۱۰\}$ و $B = \{۱،۳،۶،۸\}$ باشند. مجموعه‌های $A - B'$ ، $(A \cup B)'$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ : با حذف عضوهای مجموعه‌های A و B از U مجموعه‌های A' و B' مشخص می‌شوند:

$$A' = U - A = \{\cancel{۱}،\cancel{۲}،۳،۵،\cancel{۶}،۸،\cancel{۱۰}\} - \{۱،۲،۶،۱۰\} = \{۳،۵،۸\}$$

$$B' = U - B = \{\cancel{۱}،۲،\cancel{۳}،۵،\cancel{۶}،\cancel{۸}،۱۰\} - \{۱،۳،۶،۸\} = \{۲،۵،۱۰\}$$

مجموعهٔ $A - B'$ به صورت مقابل است:

$$A - B' = \{۱،\cancel{۲}،۶،\cancel{۱۰}\} - \{۲،۵،۱۰\} = \{۱،۶\}$$

برای مشخص کردن مجموعهٔ $(A \cup B)'$، ابتدا مجموعهٔ $A \cup B$ را به‌دست می‌آوریم و سپس متمم آن را مشخص می‌کنیم:

$$A \cup B = \{۱،۲،۳،۶،۸،۱۰\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{\cancel{۱}،\cancel{۲}،\cancel{۳}،۵،\cancel{۶}،\cancel{۸}،\cancel{۱۰}\} - \{۱،۲،۳،۶،۸،۱۰\} = \{۵\}$$

با توجه به مجموعه‌های A' و B' داریم:

$$A' \cup B' = \{۳،۵،۸\} \cup \{۲،۵،۱۰\} = \{۲،۳،۵،۸،۱۰\}$$

تست: اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی و $B=\{3k-1 \mid k\in A\}\subseteq A$ با مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشند، مجموعهٔ $B'-A'$ شامل چند عدد اول است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: مجموعه‌های A و B با اعضا به‌صورت زیر می‌باشند:

$$A=\{1,2,3,...,9\}\ ,\ B=\{3k-1 \mid k\in A\}=\{3k-1 \mid k\in\{1,2,...,9\}\}\subseteq A\Rightarrow B=\{2,5,8\}$$

$$\Rightarrow B'-A'=\{...,-1,0,1,3,4,6,7,9,10,...\}-\{...,-1,0,10,11,...\}=\{1,3,4,6,7,9\}$$

پس مجموعهٔ $B'-A'$، شامل دو عدد اول می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها): اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، آن‌گاه روابط زیر همواره برقرار است:

آ) $(A')'=A$ ب) $\varnothing'=U$ پ) $U'=\varnothing$

ت) $A\cap A'=\varnothing$ ث) $A\cup A'=U$ ج) $A-B=A\cap B'$

چ) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ح) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ خ) $A-B=A-(A\cap B)$

تذکر روابط (چ) و (ح) به قوانین دمورگان معروف هستند.

مثال: اگر $U=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{1,4,5\}$ و $B=\{1,2,3\}$ باشند، درستی تساوی‌های $A-B=A\cap B'$ و $(A\cap B)'=A'\cup B'$ را بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A' و B' را با اعضا می‌نویسیم:

$$A'=U-A=\{\cancel{1},2,3,\cancel{4},\cancel{5}\}-\{1,4,5\}=\{2,3\}$$

$$B'=U-B=\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\}$$

$$\begin{cases}A-B=\{\cancel{1},4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\}\\ A\cap B'=\{1,4,5\}\cap\{4,5\}=\{4,5\}\end{cases}\Rightarrow A-B=A\cap B'$$

$$\begin{cases}A\cap B=\{1\}\Rightarrow (A\cap B)'=U-(A\cap B)=\{2,3,4,5\}\\ A'\cup B'=\{2,3\}\cup\{4,5\}=\{2,3,4,5\}\end{cases}\Rightarrow (A\cap B)'=A'\cup B'$$

تست: اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد صحیح، $A'=\{1,2,3\}$ و $B'=\{2,3,4,5\}$ باشند، آن‌گاه $(A\cup B)'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{2,3\}$ ۲) $\{2,4,5\}$

۳) $\{3,4,5\}$ ۴) $\{4,5\}$

پاسخ:

$$(A\cup B)'\overset{\text{دمورگان}}{=\!=\!=}A'\cap B'=\{1,2,3\}\cap\{2,3,4,5\}=\{2,3\}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال: اگر $U=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2\}$ باشد:

آ) آیا $B\subseteq A$ است؟ چرا؟

ب) با به دست آوردن A' و B'، چه رابطه‌ای بین A' و B' وجود دارد؟

پاسخ: آ) هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A است، بنابراین $B\subseteq A$

ب) $A'=U-A=\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\}\ ,\ B'=U-B=\{3,4,5\}$

هر عضو A'، عضوی از B' است و در نتیجه $A'\subseteq B'$

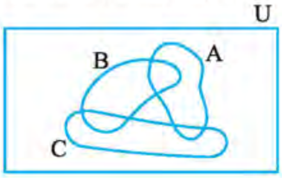
نکته اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$

مجموعه‌های جدا از هم

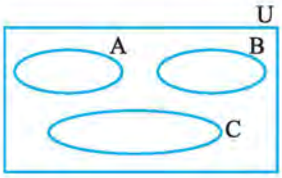
دو مجموعهٔ جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

نمودار وِن برای دو مجموعهٔ جدا از هم به صورت مقابل است:

به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۶\}$، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند، زیرا: $A\cap B=\{۱,۲,۵\}\cap\{۳,۴,۶\}=\varnothing$



نکته اگر A، B و C سه مجموعه و $A\cap B\cap C=\varnothing$ باشد، آن گاه لزوماً سه مجموعهٔ A، B و C دو به دو جدا از هم نمی‌باشند. به شکل مقابل توجه کنید:



در واقع سه مجموعهٔ A، B و C دو به دو مجزا هستند هرگاه $A\cap B=\varnothing, A\cap C=\varnothing, B\cap C=\varnothing$

نکته اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه $B\subseteq A'$ و $A\subseteq B'$

مثال: سه مجموعهٔ دو به دو مجزا و نامتناهی A ، B و C از اعداد صحیح ارائه دهید که اجتماع آن‌ها برابر $\mathbb{Z}$ شود.

پاسخ: اگر $A=\{...,-۳,-۲,-۱,۰\}$ ، $B=\{۱,۳,۵,...\}$ و $C=\{۲,۴,۶,...\}$ باشند، آن‌گاه A، B و C سه مجموعهٔ نامتناهی دو به دو جدا از هم‌اند و داریم: $A\cup B\cup C=\mathbb{Z}$

نکته با توجه به این که باقی‌ماندهٔ عدد صحیح و دلخواه a بر عدد طبیعی n برابر عددی حسابی r است که در آن $۰\le r<n$، بنابراین عدد صحیح a را می‌توان به‌صورت $a=nk+r$ نمایش داد که در آن $k\in\mathbb{Z}$ و $۰\le r<n$. بر این اساس مجموعهٔ اعداد صحیح را می‌توان به‌صورت اجتماع n مجموعهٔ دوبه‌دو جدا از هم و نامتناهی نمایش داد.

مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح را به صورت اجتماع چهار مجموعهٔ نامتناهی دو به دو جدا از هم بنویسید.

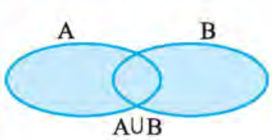
پاسخ: با استفاده از نکتهٔ قبل می‌توان نوشت:

$A=\{۴k|k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-۸,-۴,۰,۴,۸,...\}$, $B=\{۴k+۱|k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-۷,-۳,۱,۵,۹,...\}$

$C=\{۴k+۲|k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-۶,-۲,۲,۶,۱۰,...\}$, $D=\{۴k+۳|k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-۵,-۱,۳,۷,...\}$

A، B، C و D چهار مجموعهٔ دو به دو مجزا هستند و $A\cup B\cup C\cup D=\mathbb{Z}$ می‌باشد.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی



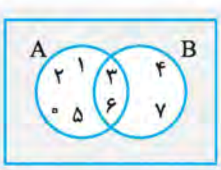
فرض کنید A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، می‌دانیم نمودار ون اجتماع دو مجموعهٔ A و B به صورت مقابل است:

عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B، یعنی $A\cap B$، در هر یک از مجموعه‌های A و B قرار دارند. بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد عضوهایی که در هر دو مجموعه (A یا B یا هر دو) قرار دارند، باید تعداد عضوهای مشترک A و B که دو بار به حساب می‌آیند، یعنی $n(A\cap B)$ را از $n(A)+n(B)$، کم کنیم.

پس:

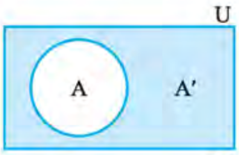
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

مثال: با توجه به نمودار وِن مقابل، $n(A\cup B)$ را به‌دست آورید.



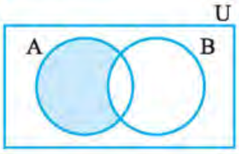
پاسخ: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۴-۲=۸$

نکته اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع و متناهی U باشند، آن‌گاه:



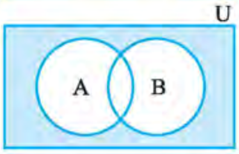
۱) تعداد اعضایی که به مجموعهٔ A تعلق ندارند برابر است با:

$$n(A')=n(U)-n(A)$$



۲) تعداد اعضایی که به مجموعهٔ A تعلق دارند و به مجموعهٔ B تعلق ندارند (فقط به مجموعهٔ A تعلق دارند)، برابر است با:

$$n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)$$



۳) تعداد اعضایی که نه به مجموعهٔ A تعلق داشته باشند و نه به مجموعهٔ B، برابر است با:

$$n(A'\cap B') \xlongequal{\text{قانون دمورگان}} n\big((A\cup B)'\big)=n(U)-n(A\cup B)$$

تذکر اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه:

۱) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ۲) $n(A-B)=n(A)$

مثال: تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد هستند و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی، مرد باشند، در این‌صورت چند نفر از ۶۳ بیمار:

آ) یا مرد هستند و یا برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟ **ب) مرد هستند ولی برای عمل جراحی بستری نشده‌اند؟**

پ) نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟

پاسخ: مجموعهٔ تمام بیماران بیمارستان را با U، مجموعهٔ بیماران مرد را با A و مجموعهٔ افرادی که برای عمل جراحی بستری شده‌اند را با B نشان می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$n(U)=۶۳\ ,\ n(A)=۳۷\ ,\ n(B)=۲۰\ ,\ n(A\cap B)=۱۲$$

آ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cup B$ مطلوب است، پس:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۷+۲۰-۱۲=۴۵$$

ب) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A-B$ مدنظر است، پس:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۳۷-۱۲=۲۵$$

پ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A'\cap B'=(A\cup B)'$ مدنظر است. پس:

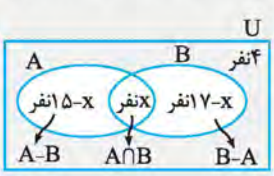
$$n(A'\cap B')=n\big((A\cup B)'\big)=n(U)-n(A\cup B) \xlongequal{(آ)} ۶۳-۴۵=۱۸$$

مثال: در یک کلاس ۲۷ نفری، تعداد ۱۵ نفر از دانش آموزان عضو گروه نقاشی و ۱۷ نفر آن‌ها عضو گروه طراحی هستند. اگر ۴ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو گروه نباشند، مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

آ) عضو هر دو گروه باشند. **ب) عضو گروه نقاشی باشند ولی عضو گروه طراحی نباشند.**

پاسخ: مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان عضو گروه نقاشی را با A، مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان عضو گروه طراحی را با B و مجموعهٔ مرجع را با U نمایش می‌دهیم.

روش اول: در نمودار ون زیر، دو مجموعهٔ A و B سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که ۴ نفر طبق فرض در خارج مجموعهٔ $A\cup B$ قرار دارند. فرض کنیم x نفر در اشتراک دو مجموعهٔ A و B باشند، در این صورت $۱۵-x$ نفر در مجموعهٔ $A-B$ و $۱۷-x$ نفر در مجموعهٔ $B-A$ هستند. بنابراین:



$$n(U)=۲۷\Rightarrow(۱۵-x)+x+(۱۷-x)+۴=۲۷\Rightarrow ۳۶-x=۲۷\Rightarrow x=۹$$

آ) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند، برابر $x=۹$ نفر می‌باشد.

ب) تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ مطلوب است، پس

$$n(A-B)=۱۵-x=۱۵-۹=۶$$

روش دوم:

طبق فرض $n(A)=۱۵$، $n(B)=۱۷$ و $n(A\cup B)=۲۷-۴=۲۳$ می‌باشد.

آ) $n(A\cap B)$ جواب مسئله است:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۲۳=۱۵+۷-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۲-۲۳=۹$$

ب) $n(A-B)$ جواب مسئله است:

$$n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۱۵-۹=۶$$

تست: اگر $n(A)=۱۷$ ، $n(A\cap B)=۴$ و $n(A\cup B)=۳۰$ باشند، $n(B)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۰=۱۷+n(B)-۴$

$\Rightarrow n(B)+۱۳=۳۰\Rightarrow n(B)=۳۰-۱۳=۱۷\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست: اگر $۲n(A)=n(B)=۳n(A\cap B)$ باشد، حاصل $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A)-n(A\cap B)}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: تعداد عضوهای هریک از مجموعه‌های A ، B و $A\cup B$ را بر حسب تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ به دست می‌آوریم:

$$۲n(A)=n(B)=۳n(A\cap B)\Rightarrow n(A)=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)\ ,\ n(B)=۳n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)+۳n(A\cap B)-n(A\cap B)=\frac{۷}{۲}n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(A)-n(A\cap B)}=\frac{\frac{۷}{۲}n(A\cap B)}{\frac{۳}{۲}n(A\cap B)-n(A\cap B)}=\frac{\frac{۷}{۲}\cancel{n(A\cap B)}}{\frac{۱}{۲}\cancel{n(A\cap B)}}=۷\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تعداد عضوهای اجتماع سه مجموعه متناهی — ویژهٔ علاقمندان

اگر A ، B و C سه مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

تست: اگر $n(A\cap B)=۴$ ، $n(A\cap C)=n(B\cap C)=۰$ ، $n(A)=۱۰$ ، $n(B)=۴$ و $n(C)=۷$ باشد، مقدار $n(A\cup B\cup C)$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۷ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

پاسخ: A و C و نیز B و C مجموعه‌های جدا از هم می‌باشند، بنابراین: $A\cap B\cap C=\varnothing\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۰$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$=۱۰+۴+۷-۴-۰-۰+۰=۱۷\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال: در یک نظرسنجی از ۱۵۰ نفر، مشخص شده است که:

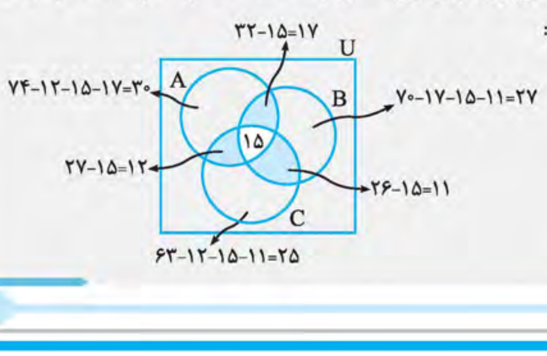
۷۴ نفر مجلهٔ A ، ۷۰ نفر مجلهٔ B و ۶۳ نفر مجلهٔ C را می‌خوانند. هم‌چنین ۳۲ نفر مجله‌های A و B ، ۲۶ نفر مجله‌های B و C ، ۲۷ نفر مجله‌های A و C و ۱۵ نفر هر سه مجلهٔ A ، B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعیین تعداد افرادی از این مجموعه که:

آ) دقیقاً یکی از سه مجلهٔ A یا B یا C را می‌خوانند. ب) دقیقاً دو مجله می‌خوانند.

پ) مجلهٔ A را می‌خوانند ولی مجلهٔ B را نمی‌خوانند. ت) هیچ‌یک از این سه مجله را نمی‌خوانند.

پاسخ: مجموعه‌های A ، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : افرادی که مجلهٔ A را می‌خوانند. B: افرادی که مجلهٔ B را می‌خوانند. و C: افرادی که مجلهٔ C را می‌خوانند. نمودار وِن سه مجموعهٔ A ، B و C به‌صورت زیر است که با توجه به اطلاعات مسئله، تعداد عضوهای هر قسمت را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا تعداد اعضای اشتراک سه مجموعه، سپس اشتراک دوبه‌دوی مجموعه‌ها و درنهایت باقی‌ماندهٔ مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:



با توجه به نمودار داریم:

آ) $۳۰+۲۷+۲۵=۸۲$

ب) $۱۲+۱۷+۱۱=۴۰$

پ) $۳۰+۱۲=۴۲$

ت) $۱۵۰-(۳۰+۲۷+۲۵+۱۲+۱۷+۱۱+۱۵)=۱۵۰-۱۳۷=۱۳$

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها

۱. اگر $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\varnothing\subseteq A$ ۲) $\{\varnothing\}\in A$ ۳) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq A$ ۴) $n(A)=۲$

۲. اگر مجموعهٔ C به صورت $\{x+۲ \mid x\in P ,\ ۴\le x-۱<۳۰\}$ تعریف شده باشد که در آن منظور از P مجموعهٔ اعداد اول می‌باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $۳۱\in C$ ۲) $۵\in C$ ۳) $۱۳\notin C$ ۴) $۲۹\in C$

۳. کدام‌یک از اعداد زیر به مجموعهٔ $A=\{۲^x\times ۳^y \mid x,y\in\mathbb{N},x+y=۵\}$ متعلق است؟

۱) ۸۱ ۲) ۴۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۴۴

۴. کدام‌یک از اعداد زیر به مجموعهٔ $A=\{۵,-۱,-۷,\dots,-۴۳\}$ متعلق نیست؟

۱) -۲۵ ۲) -۱۳ ۳) -۳۷ ۴) -۲۱

۵. هرگاه $\{۱,۲,۳,۴,۵\}\cup X=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، برای مجموعهٔ X چند جواب وجود دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۶. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۵\}$ باشد، به جای X در رابطهٔ $A\cap B\subseteq X\subseteq A\cup B$ چند مجموعهٔ متفاوت می‌توان قرار داد؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

بازه‌ها

۷. کدام گزینه درست است؟

۱) $-۲\in\{-۳,۲\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۰<x<۱\}=(۰,۱)$ ۳) $\sqrt{۲}\in(۱,۳)\cap[۲,+\infty)$ ۴) $\{-۱,\pi\}\subseteq[-۱,۴)$

۸. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\left[\frac{۱}{n},\frac{n}{n+۱}\right]\subseteq(۰,۱)$ ، $(n\in\mathbb{N},n\ge ۲)$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -۱$ یا $x\ge ۳\}=\mathbb{R}-(-۱,۳)$

۳) $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]=(-۳,۵]$ ۴) $[۲,۴)-(۳,+\infty)=[۴,+\infty)$

۹. حاصل عبارت $(-۲,۱]\cap[-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۲)$ ۳) $[-۲,-۱]$ ۴) $[-۲,۲)$

۱۰. حاصل عبارت $[-۲,۳)-(۰,۲]$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]\cup[۲,۳)$ ۲) $[-۲,۰)\cup(۲,۳)$ ۳) $[-۲,۰)\cup[۲,۳]$ ۴) $[-۲,۰]\cup(۲,۳)$

۱۱. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\le ۲x-۱<۷\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۳x+۲<۸\}$ باشد، حاصل $A-B$ کدام است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $[۲,۴)$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(-\infty,۱]$

۱۲. اگر $A=(-۲,۵]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -x\in A\}$، در این صورت مجموعهٔ $A-B$ برابر کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(۲,۵]$ ۴) $[۲,۵]$

۱۳. اگر $A=(-\infty,۲]$ ، $B=[-۳,۱)$ و $C=(-۱,+\infty)$ باشد، حاصل $B\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $[-۳,۲]$ ۲) $(-۳,۲)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $[-۳,۱)$

۱۴. اگر $2m+1 \in [-1,5]$، حدود m کدام است؟

۱) $0 \le m \le 3$ ۲) $-1 \le m \le 2$ ۳) $-3 \le m \le 0$ ۴) $1 \le m \le 4$

۱۵. اگر عدد ۱ به بازهٔ $(2m-1, 3m+4]$ تعلق داشته باشد، آن‌گاه:

۱) $m \in [-2,4)$ ۲) $m \in [-1,1)$ ۳) $m \in (0,4]$ ۴) $m \in (-2,0]$

۱۶. بازهٔ $[5,b)$ شامل فقط سه عدد مربع کامل است. حداکثر مقدار طبیعی b کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷

۱۷. اگر بازهٔ $(-1, 2a-1)$ شامل پنج عدد صحیح باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $2/5 \le a \le 3$ ۲) $2/5 < a < 3$ ۳) $2/5 < a \le 3$ ۴) $2/5 \le a < 3$

۱۸. اگر $[1,a] \cup [b,5) = [-1,7]$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۹. اگر $A_n = (n-2, n+3), n \in \mathbb{N}$ باشد، $A_1 - (A_2 \cap A_3)$ کدام است؟

۱) $(4,5)$ ۲) $(4,5]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-1,1]$

۲۰. اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعهٔ $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر کدام بازه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ۲) $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ۴) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

۲۱. اگر $i \in \{1,2,3,\dots,9\}$ ، $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۲)

۱) $[-2,-1) \cup (1,2]$ ۲) $[-2,-1] \cup [1,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\varnothing$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۲. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) مجموعهٔ سلول‌های عصبی مغز یک انسان
۲) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون
۳) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۱
۴) مجموعهٔ مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی

۲۳. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر بی‌پایان است؟

۱) مجموعهٔ تمام افراد روی کرهٔ زمین
۲) مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های موجود در جهان
۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵
۴) مجموعهٔ تمام اعداد اول زوج

۲۴. اگر $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ به‌ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح باشند، کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{W} \cap \mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W}$ ۴) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

۲۵. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعهٔ نامتناهی باشد، مجموعهٔ $A - B$ چگونه است؟

۱) باپایان ۲) بی‌پایان ۳) تهی ۴) غیرقابل تعریف

۲۶. کدام مجموعه متناهی (باپایان) است؟

۱) $\{x \mid x \in \mathbb{N} ; x^2 > 16\}$ ۲) $\{x \mid x \in \mathbb{N} ; x \le 2^{12}\}$ ۳) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} ; x > 1000\}$ ۴) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} ; x < 1000\}$

۲۷. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
۲) مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ $(1,2)$
۳) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 1000\}$
۴) مجموعهٔ اعداد اول فرد

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و ...

مجموعه‌های مرجع و متمم

۲۸. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، E مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و O مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشد، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $E \cap O = O$ ۲) $E \cup O = \mathbb{N}$ ۳) $(E \cup O)' = \varnothing$ ۴) $E' \cap O = O$

۲۹. اگر مجموعه‌های A و B هردو زیرمجموعهٔ اعداد صحیح باشند به‌طوری‌که A مجموعه‌ای نامتناهی، B مجموعه‌ای متناهی و $C \subseteq A$ باشد، در این صورت کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) $A \cap B'$ ۲) $B - A$ ۳) $B \cup C$ ۴) $A \cap C'$

۳۰. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعهٔ نامتناهی باشد،آن‌گاه کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $A \cup B$ ۲) $A' \cup B$ ۳) $A \cap B'$ ۴) $A' \cap B$

۳۱. اگر A بازهٔ متناظر با مجموعه جواب نامعادلهٔ $x < ۲x + ۳ \le ۶ - x$ و $B = (-\infty, -۲) \cup [۴, +\infty)$ و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، حاصل $A \cap B'$ کدام است؟

۱) $(-۳, ۴)$ ۲) $(-۳, -۲)$ ۳) $[-۲, ۱]$ ۴) $(-۲, ۱]$

۳۲. اگر مجموعهٔ اعداد حسابی $(\mathbb{W})$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۲x \mid x \in \mathbb{W}\}$، آن‌گاه A' برابر کدام است؟

۱) $\{۲x \mid x \in \mathbb{W}'\}$ ۲) $\{۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$ ۳) $\{۲x + ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$ ۴) $\{x - ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$

۳۳. اگر $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < ۴۰\}$ و $A = \{x \in U \mid ۷ \le x \le ۲۵\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A' \cup U$ چند عضو دارد؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۹ ۳) ۲۳ ۴) ۱۹

۳۴. اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، $A' = \{x \mid x \ge ۲\}$ و $B' = \{x \mid x \ge ۵\}$ باشد، مجموعهٔ $A \cup B$ کدام است؟

۱) $\{۱, ۲\}$ ۲) $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ ۳) $\{۲, ۳, ۴, ۵\}$ ۴) $\varnothing$

۳۵. اگر $A' = \{۱, ۲, ۴\}$، $B' = \{۲, ۳\}$ و مجموعهٔ مرجع اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه $(A \cap B)'$ کدام است؟

۱) $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ ۲) $\{۱, ۴, ۳\}$ ۳) $\{۱, ۴\}$ ۴) $\{۲\}$

۳۶. اگر مجموعهٔ $\mathbb{N}$ مرجع، $A = \{x \mid x \ge ۴\}$ و $B = \{x \mid x < ۲\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A \cup B)'$ برابر کدام است؟

۱) $\{۱, ۲\}$ ۲) $\{۳\}$ ۳) $\{۲, ۳\}$ ۴) $\{۱, ۲, ۳\}$

۳۷. اگر $U = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$، $A \cap B = \{۲, ۳\}$، $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۹\}$، $A \subseteq \{۱, ۴\}$ و $B \subseteq \{۵, ۷, ۹\}$ باشند، مجموعهٔ A' کدام است؟

۱) $\{۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ۲) $\{۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ۳) $\{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ۴) $\{۵, ۷, ۸, ۹\}$

جبر مجموعه‌ها

۳۸. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $(A \cap B') - A$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) $\varnothing$

۳۹. حاصل $[A \cup (A' \cap U)] \cup B$ در کدام گزینه آمده است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) A ۲) U ۳) B ۴) $\varnothing$

۴۰. اگر U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن باشد، سادهٔ شدهٔ مجموعهٔ $((A \cap U)' \cup A) - (A' - U')'$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) U ۴) $\varnothing$

۴۱. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و $B - A = B$ باشد، حاصل $(A \cap B)' \cup (A - B)$ کدام است؟

۱) B ۲) U ۳) $\varnothing$ ۴) A

۴۲. متمم مجموعهٔ $[(A \cap B') \cup (A' \cup B)]$ کدام است؟

۱) $A - B$ ۲) U ۳) $B - A$ ۴) $\varnothing$

۴۳. متمم مجموعهٔ $(B - A)' - A$، نسبت به مجموعهٔ مرجع کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) A ۴) B

۴۴. اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $B' \subseteq A'$ ۲) $A' \cup B = U$ ۳) $A \cap B' = \varnothing$ ۴) $A' \cap B = \varnothing$

شمارش اعضای مجموعه‌ها

۴۵. اگر $n(U) = ۳۰$، $n(A) = ۱۲$، $n(B) = ۲۰$ و $n(A \cap B) = ۷$ باشد، حاصل $n(A' \cap B')$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۳

۴۶. اگر $n(A) + n(B) = ۳n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\dfrac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

۴۷. اگر $n(A-B)=2n(A\cap B)$ و $n(B)=2n(A\cap B)$ باشند، حاصل $\frac{n(A\cup B)}{n(B-A)}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۴

۴۸. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۴ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمندند و ۴ نفر نیز به هیچ‌یک از دو بازی علاقه‌ای ندارند. در این کلاس چند نفر فقط به والیبال علاقمند هستند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶ ۴) ۲

۴۹. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۰. از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۳ نفر عضو تیم والیبال می‌باشند. با فرض آن‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد، چند نفر دقیقاً عضو یکی از این دو تیم هستند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۵۱. اگر $A=\{7n+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{7n-3 \mid n\in\mathbb{N}\}$ دو مجموعه باشند، کدام دو عدد زیر نه در مجموعهٔ A و نه در مجموعهٔ B قرار دارند؟

۱) ۳۵،۶۷ ۲) ۵۹،۴۱ ۳) ۳۹،۶۸ ۴) ۸۵،۷۴

۵۲. مجموعه‌های $A\cup B$، $A\cap B$ و $A-B$ به‌ترتیب ۵، ۲ و ۲ عضو دارند. مجموعهٔ $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۳. اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، تعداد اعضای $A\cup B$ سه برابر تعداد اعضای B، تعداد اعضای A، $\frac{5}{2}$ برابر تعداد اعضای B و تعداد اعضایی که به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق دارند برابر ۳ باشد، آن‌گاه تعداد اعضایی که حداقل به یکی از دو مجموعهٔ A یا B تعلق دارد کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۵۴. اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعهٔ اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۵۵. اجتماع دو مجموعهٔ A و B، ۲۵ عضو دارد. به مجموعهٔ A، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده‌ایم، به اشتراک آن‌ها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعهٔ B و مجموعهٔ جدید حاصل از A چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

۵۶. مجموعهٔ A دارای ۳۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعهٔ A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعهٔ جدید با مجموعهٔ B کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۵۷. اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد، چند عدد وجود دارد که نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۷ ۳) ۵۰ ۴) ۵۳

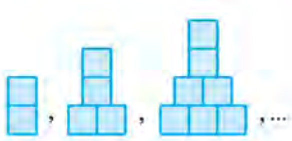
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی

الگویابی

۵۸. با توجه به الگوی مقابل، در شکل پانزدهم چند ستاره وجود دارد؟

۱) ۲۰۱ ۲) ۲۱۹ ۳) ۲۲۹ ۴) ۲۴۹

۵۹. در الگوی مقابل، جملهٔ بیستم از چند مربع تشکیل‌یافته است؟



۱) ۲۰۰ ۲) ۲۰۱ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۱۱

پاسخ فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

مجموعهٔ A دارای سه عضو $\varnothing$، $\{\varnothing\}$ و $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$ می‌باشد. یعنی تعداد اعضای A برابر ۳ است پس $n(A)=۳$. می‌دانیم مجموعهٔ $\varnothing$(تهی) زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است، پس گزینهٔ (۱) درست است و چون $\{\varnothing\}$ عضوی از مجموعهٔ A است، پس گزینهٔ (۲) نیز درست است و چون اعضای $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ به A تعلق دارند، پس $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq A$

۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

مجموعهٔ C را می‌توان به صورت $C=\{x+۲ \mid x\in P\ ,\ ۵\le x<۳۱\}$ نوشت. برای نوشتن اعضای مجموعهٔ C ابتدا تمام اعداد اول که در رابطهٔ $۵\le x<۳۱$ صدق می‌کنند را می‌نویسیم و سپس به هر یک از آن‌ها ۲ واحد اضافه می‌کنیم. اما اعداد اولی که در رابطهٔ $۵\le x<۳۱$ صدق می‌کنند عبارتند از: ۵،۷،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۹

در نتیجه مجموعهٔ C عبارت است از: $C=\{۷,۹,۱۳,۱۵,۱۹,۲۱,۲۵,۳۱\}$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها رابطهٔ $۳۱\in C$ درست است و بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

تمام اعداد طبیعی که مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد، عبارتند از:

$$\begin{cases}x=۴\\y=۱\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x=۳\\y=۲\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x=۲\\y=۳\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x=۱\\y=۴\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ A عبارت است از:

$$A=\{۲^۱\times۳^۴\ ,\ ۲^۲\times۳^۳\ ,\ ۲^۳\times۳^۲\ ,\ ۲^۴\times۳^۱\}=\{۱۶۲,۱۰۸,۷۲,۴۸\}$$

با توجه به گزینه‌ها، عدد ۴۸ در مجموعهٔ A قرار دارد.

۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

مجموعهٔ A شامل مضارب ۶ منهای یک، از ۵ تا ۴۳- می‌باشد. لذا مجموعهٔ A عبارت است از:

$$A=\{۵,-۱,-۷,-۱۳,-۱۹,-۲۵,-۳۱,-۳۷,-۴۳\}$$

بنابراین عدد ۲۱- متعلق به مجموعهٔ A نیست.

۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

مجموعهٔ X باید عضو ۶ را داشته باشد و اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را نیز می‌تواند اختیار کند یا نه، لذا برای هر یک از اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دو حالت وجود دارد که به X تعلق داشته باشند یا خیر. لذا تعداد مجموعه‌های X که در معادلهٔ داده شده صدق کنند برابر تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، یعنی $۳۲=۲^۵$ می‌باشد.

۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

مجموعهٔ X باید اعضای مجموعهٔ $A\cap B$ یعنی ۳ را شامل باشد. همچنین هریک از اعضای $A\cup B$، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به جز ۳ می‌تواند در X باشند، لذا تعداد مجموعه‌هایی مانند X که در رابطهٔ مذکور صدق می‌کنند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۴,۵\}$ می‌باشد که برابر $۱۶=۲^۴$ است.

۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\{-۳,۲\}$ مجموعه‌ای فقط با دو عضو ۳- و ۲ می‌باشد، بنابراین $-۲\not\subseteq\{-۳,۲\}$

گزینهٔ (۲): بازه‌ها زیرمجموعه‌ای از تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشند و شامل فقط اعداد گویا نمی‌باشند، در واقع: $(۰,۱)=\{x\in\mathbb{R} \mid ۰<x<۱\}$

گزینهٔ (۳): $(۱,۳)\cap[۲,+\infty)=[۲,۳)\ ,\ \sqrt{۲}<۲\Rightarrow\sqrt{۲}\not\in[۲,۳)$

گزینهٔ (۴): $-۱\le\pi=۳/۱۴۱۵\cdots<۴\Rightarrow\pi\in[-۱,۴)$

همچنین $-۱\in[-۱,۴)$ ، پس: $\{-۱,\pi\}\subseteq[-۱,۴)$

۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با فرض $A_n=\left[\frac{۱}{n},\frac{n}{n+۱}\right]$ چون $n\in\mathbb{N}$ و $n\ge۲$، می‌توان نوشت:

$$A_۲=\left[\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳}\right]\ ,\ A_۳=\left[\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۴}\right]\ ,\ A_۴=\left[\frac{۱}{۴},\frac{۴}{۵}\right]\ ,\dots$$

بدیهی است که با افزایش n، ابتدای بازه‌ها به عدد صفر و انتهای بازه‌ها به عدد ۱ نزدیک می‌شود ولی هرگز به این اعداد نمی‌رسند. پس برای هر عدد طبیعی $n\ge۲$، $A_n\subseteq(۰,۱)$. لذا این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۲): نمایش هندسی مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R} \mid x\le-۱ \text{ یا } x\ge۳\}$ روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است:

روشن است که این مجموعه را می‌توان به صورت $\mathbb{R}-(-۱,۳)$ نیز نمایش داد. پس این گزینه نیز صحیح است.

گزینهٔ (۳): با توجه به شکل داریم:

پس این گزینه نیز صحیح است. $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]=(-۳,۵]$

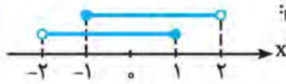
گزینهٔ (۴): برای محاسبهٔ حاصل $[۲,۴)-(۳,+\infty)$، باید از بازهٔ $[۲,۴)$، اعضایی را که در بازهٔ $(۳,+\infty)$ نیز قرار دارند، حذف شود. در واقع داریم:

$$[۲,۴)-(۳,+\infty)=[۲,۳]$$

پس این گزینه نادرست می‌باشد و جواب تست نیز همین گزینه است.

۹ — **(۱)** (۲) (۳) (۴)

با نمایش هندسی هریک از دو بازه، داریم:



$$\Rightarrow (-2,1] \cap [-1,2) = [-1,1]$$

۱۰ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

تمام اعضای بازهٔ $(0,2]$ را باید از بازهٔ $[-2,3)$ حذف کنیم. توجه کنید که عدد صفر عضو مجموعهٔ $(0,2]$ نیست، پس صفر را از $[-2,3)$ حذف نمی‌کنیم ولی چون $2 \in (0,2]$، پس عدد ۲ را باید از بازهٔ $[-2,3)$ حذف کنیم، پس:

$$[-2,3) - (0,2] = [-2,0] \cup (2,3)$$

۱۱ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

ابتدا هریک از مجموعه‌های A و B را به صورت بازه نمایش داده و سپس حاصل $A - B$ را می‌یابیم:

$$1 \le 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2 \le 2x < 8 \Rightarrow 1 \le x < 4 \Rightarrow A = [1,4) \quad (1)$$

$$3x + 2 < 8 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow B = (-\infty,2) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow A - B = [1,4) - (-\infty,2) = [2,4)$$

۱۲ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بنابر تعریف مجموعهٔ B، اعضای آن، قرینهٔ اعضای مجموعهٔ A هستند. پس:

$$x \in B \Rightarrow -x \in A \Rightarrow -x \in (-2,5] \Rightarrow -2 < -x \le 5$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -5 \le x < 2 \Rightarrow x \in [-5,2) \Rightarrow B = [-5,2)$$

$$A - B = (-2,5] - [-5,2) = [2,5]$$

۱۳ — **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$A \cap C = (-\infty,2] \cap (-1,+\infty) = (-1,2]$$

$$B \cup (A \cap C) = [-3,1) \cup (-1,2] = [-3,2]$$

۱۴ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$2m + 1 \in [-1,5] \Rightarrow -1 \le 2m + 1 \le 5$$

$$\xrightarrow{-1} -2 \le 2m \le 4 \xrightarrow{\div 2} -1 \le m \le 2$$

۱۵ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$1 \in (2m-1, 3m+4] \Rightarrow 2m - 1 < 1 \le 3m + 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le 3m + 4 \\ 2m - 1 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 \le 3m \\ 2m < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le m \\ m < 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -1 \le m < 1 \Rightarrow m \in [-1,1)$$

۱۶ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

اولین سه عدد مربع کامل بزرگ‌تر از ۵ عبارتند از ۹، ۱۶ و ۲۵. پس بازهٔ $[5,b)$ باید شامل این سه عدد بوده و شامل هیچ عدد مربع کامل دیگری نباشد و نیز b بیش‌ترین مقدار را داشته باشد. چون عدد مربع کامل بعدی برابر ۳۶ بوده و بازه از طرف b باز است، پس بیش‌ترین مقدار b برابر ۳۶ است. در واقع بازهٔ $[5,36)$ دارای سه عدد مربع کامل بوده و انتهای بازه بیش‌ترین مقدار ممکن را دارا است.

۱۷ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

پنج عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱-، عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴. با توجه به باز بودن بازه، برای این‌که این بازه شامل پنج عدد مذکور باشد، $2a - 1$ باید از ۴ بیش‌تر ولی کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$4 < 2a - 1 \le 5 \Rightarrow 5 < 2a \le 6 \Rightarrow 2.5 < a \le 3$$

۱۸ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

چون اجتماع دوبازهٔ $[1,a]$ و $[b,5)$ برابر یک بازه شده است، پس این بازه‌ها حتماً با هم اشتراک دارند. هم‌چنین چون اجتماع این بازه‌ها برابر هیچ یک از آن‌ها نشده است، پس هیچ کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیستند.

از طرفی چون ابتدای بازهٔ جواب، $-1<1$ است، پس قطعاً $b < 1$ می‌باشد.

پس نمایش هندسی این بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی می‌بایست به‌صورت روبه‌رو باشد:

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$[1,a] \cup [b,5) = [b,a]$$

پس بنابر فرض داریم:

$$[b,a] = [-1,7] \Rightarrow b = -1, a = 7 \Rightarrow a - b = 7 - (-1) = 8$$

۱۹ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

با قرار دادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای n در $A_n = (n-2, n+3)$، مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 را مشخص می‌کنیم:

$$A_1 = (1-2, 1+3) = (-1,4) \ , \ A_2 = (0,5) \ , \ A_3 = (1,6)$$

$$\Rightarrow A_2 \cap A_3 = (0,5) \cap (1,6) = (1,5)$$

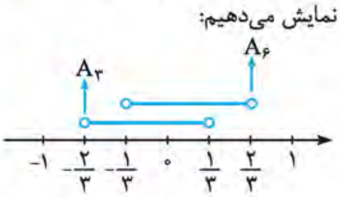
$$\Rightarrow A_1 - (A_2 \cap A_3) = (-1,4) - (1,5) = (-1,1]$$

۲۰ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right) \Rightarrow A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

بازه‌های A_3 و A_6 را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A_3 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow (A_3 \cup A_6) - A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

۲۱ — **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$$

$$A_1 = [-1,4] \ , \ A_2 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \ , \ A_5 = [-5,2] \ , \ A_7 = [-7,1]$$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \cap [-5,2] = [-2,2] \ , \ A_1 \cap A_7 = [-1,1]$$

$$\Rightarrow (A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2,2] - [-1,1] = [-2,-1) \cup (1,2]$$

۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

در مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت کسر ۱، در مخرج کسر می‌توان هر عدد طبیعی قرار داد و چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی است، این مجموعه نامتناهی است.
تعداد اعضای بقیهٔ مجموعه‌های ارائه شده در سایر گزینه‌ها برابر یک عدد حسابی بوده و در نتیجه همگی آن‌ها مجموعهٔ متناهی‌اند.

۲۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

مجموعهٔ تمام افراد روی کرهٔ زمین و همچنین مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های موجود در جهان متناهی هستند گرچه تعداد آن‌ها زیاد است. همچنین مجموعهٔ تمام اعداد اول زوج، یک مجموعهٔ تک عضوی $\{2\}$ است، لذا متناهی می‌باشد ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵، بی‌شمار عضو دارد و در نتیجه نامتناهی (بی‌پایان) است.

۲۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

بدیهی است که $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$ و مجموعهٔ تک عضوی $\{0\}$ متناهی است.
توجه کنید که: $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{...,-3,-2,-1\}$

$\mathbb{W}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{Z}\cap\mathbb{W}=\mathbb{W}$

۲۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم $A-B\subseteq A$ و چون مجموعهٔ A متناهی است، پس مجموعهٔ $A-B$ نیز همواره متناهی خواهد بود. توجه کنید که ممکن است $A-B=\varnothing$ باشد که در این صورت نیز مجموعهٔ $A-B$ متناهی است. زیرا تعداد اعضای $A-B$ در این حالت نیز برابر یک عدد حسابی می‌باشد.

۲۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

هریک از مجموعه‌های داده شده در گزینه‌ها را با اعضا نمایش می‌دهیم:
گزینهٔ (۱): $\{5,6,7,8,...\}$ گزینهٔ (۲): $\{1,2,...,2^{12}\}$
گزینهٔ (۳): $\{1001,1002,1003,...\}$ گزینهٔ (۴): $\{999,998,997,...\}$
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تنها مجموعهٔ مذکور در گزینهٔ (۲) متناهی است.

۲۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

داریم: $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<1000\}=\{-31,-30,...,30,31\}$
بنابراین مجموعهٔ ارائه شده در گزینهٔ (۳) متناهی است. مجموعهٔ ارائه شده در سایر گزینه‌ها، نامتناهی هستند.

۲۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد هیچ اشتراکی با هم ندارند و بنابراین $E\cap O=\varnothing$ خواهد بود.

۲۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم $A\cap B'=A-B$ و از آن جایی که اگر از مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای متناهی کم شود، حاصل مجموعه‌ای نامتناهی خواهد بود، پس مجموعهٔ $A\cap B'=A-B$ قطعاً مجموعه‌ای نامتناهی است.
در گزینهٔ (۲)، چون $B-A\subseteq B$ و مجموعهٔ B متناهی است، پس $B-A$ نیز متناهی است.
در گزینهٔ (۳)، اگر مجموعهٔ C که $C\subseteq A$ است، متناهی باشد، مجموعه $B\cup C$ متناهی خواهد بود. بنابراین این مجموعه الزاماً نامتناهی نیست.
در گزینهٔ (۴)، اگر مجموعهٔ C' متناهی باشد، از آن جایی که اشتراک یک مجموعهٔ متناهی و یک مجموعهٔ نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی است، پس این مجموعه نیز متناهی خواهد بود.

۳۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به این که $A\cap B'\subseteq A$ است و مجموعهٔ A مجموعه‌ای متناهی می‌باشد، پس مجموعهٔ $A\cap B'$ نیز متناهی است.

۳۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$x<2x+3\le 6-x\Rightarrow\begin{cases}x<2x+3\\ ,\\ 2x+3\le 6-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3<x\\ ,\\ 3x\le 3\Rightarrow x\le 1\end{cases}\Rightarrow -3<x\le 1\Rightarrow A=(-3,1]$$

$$B=(-\infty,-2)\cup[4,+\infty)\Rightarrow B'=[-2,4)$$

$$\Rightarrow A\cap B'=(-3,1]\cap[-2,4)=[-2,1]$$

۳۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,4,...\}$ $\qquad A=\{0,2,4,6,...\}$

چون مجموعهٔ $\mathbb{W}$ را مرجع گرفته‌ایم، بنابراین متمم مجموعهٔ A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{W}$ است که اعضای A در آن نباشد، بنابراین $A'=\{1,3,5,7,...\}$، بنابراین A' تمام اعداد فرد با شروع از یک را شامل است که می‌توان آن را با نماد ریاضی به صورت $A'=\{2x+1\mid x\in\mathbb{W}\}$ نمایش داد. توجه کنید که در گزینهٔ (۲) اعداد فرد از ۱- شروع می‌شوند و چون A و A' باید در داخل مجموعهٔ مرجع باشند، این گزینه نادرست است.

۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\left.\begin{array}{l}U=\{1,2,3,...,39\}\\ A'=U-A=\{1,2,3,4,5,6,26,27,...,39\}\end{array}\right\}\Rightarrow A'\cup U=U$$

بنابراین $A'\cup U$ دارای ۳۹ عضو می‌باشد.

۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به مجموعهٔ مرجع که برابر مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌باشد، ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A'=\{2,3,4,...\}\Rightarrow A=\{1\},B'=\{5,6,7,...\}\Rightarrow B=\{1,2,3,4\}$

بنابراین: $A\cup B=\{1,2,3,4\}$

۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$(A\cap B)'\xlongequal{\text{دمورگان}}A'\cup B'=\{1,2,4\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3,4\}$$

۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از قوانین دمورگان می‌دانیم $(A\cup B)'=A'\cap B'$، داریم:

$A'=\{1,2,3\}\ ,\ B'=\{2,3,4,...\}\Rightarrow A'\cap B'=\{2,3\}$

۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$. چون $A\cap B=\{2,3\}$، پس مجموعه‌های A و B هر دو شامل اعضای ۲ و ۳ هستند. از سوی دیگر $\{1,4\}\subseteq A$ و $\{5,7,9\}\subseteq B$، پس داریم:

$A=\{1,4,2,3\}\ ,\ B=\{5,7,9,2,3\}$

از آن‌جایی که $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$، پس مجموعه‌های A و B عضو دیگری ندارند. بنابراین:

$A'=U-A=\{1,2,\cdots,9\}-\{1,2,3,4\}=\{5,6,7,8,9\}$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A\cap B')-A=(A\cap B')\cap A'=(A\cap A')\cap B'=\varnothing\cap B'=\varnothing$$

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

چون U مجموعهٔ مرجع می‌باشد، لذا $A'\subseteq U$ و در نتیجه $A'\cap U=A'$، بنابراین $A\cup(A'\cap U)=A\cup A'=U$، پس:

$$[A\cup(A'\cap U)]\cup B=U\cup B=U$$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A\subseteq U\Rightarrow A\cap U=A\Rightarrow(A\cap U)'\cup A=A'\cup A=U \quad (۱)$$

$$U'=\varnothing\Rightarrow A'-U'=A'-\varnothing=A'$$

$$\Rightarrow(A'-U')'=(A')'=A \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \text{مجموعه}=U-A=A'$$

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

چون A و B ناتهی هستند و $B-A=B$، لذا A و B جدا از هم می‌باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$. بنابراین:

$$(A\cap B)'\cup(A-B)=\varnothing'\cup A=U\cup A=U$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$[(A\cap B')\cup(A'\cup B)]=[(A\cap B')\cup((A'\cup B)')']$$

$$=[(A\cap B')\cup(A\cap B')']=U$$

بنابراین متمم مجموعهٔ فوق، یعنی U برابر $\varnothing$ می‌باشد.

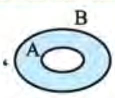
۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'=(B'\cup A)\cap A'$$

$$=(A'\cap B')\cup(A'\cap A)=(A'\cap B')\cup\varnothing=A'\cap B'$$

$$\Rightarrow((B-A)'-A)'=(A'\cap B')'=A\cup B$$

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار ون 

، لزومی ندارد مجموعهٔ $B-A=B\cap A'$ یک مجموعهٔ تهی باشد.

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))$$

$$=۳۰-(۱۲+۲۰-۷)=۳۰-۲۵=۵$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\xlongequal{n(A)+n(B)=۳n(A\cap B)}۳n(A\cap B)-n(A\cap B)=۲n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{۲n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=۲$$

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\ ,\ n(A-B)=۲n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow n(A)-n(A\cap B)=۲n(A\cap B)\Rightarrow n(A)=۳n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=۳n(A\cap B)+۲n(A\cap B)-n(A\cap B)=۴n(A\cap B) \quad (۱)$$

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

$$=۲n(A\cap B)-n(A\cap B)=n(A\cap B) \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(B-A)}=\frac{۴\cancel{n(A\cap B)}}{\cancel{n(A\cap B)}}=۴$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: در این مسئله اگر A مجموعهٔ افرادی که به فوتبال و B مجموعهٔ افرادی که به والیبال علاقه دارند باشد، آن‌گاه داریم $n(A)=۲۴$ و $n(B)=۱۸$ و چون از ۳۰ نفر ۴ نفر به هیچ یک از این دو ورزش علاقمند نیستند، لذا $n(A\cup B)=۲۶$. بنابراین داریم:

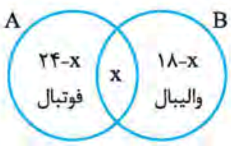
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۲۶=۲۴+۱۸-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۶$$

در نتیجه تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند برابر است با:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱۸-۱۶=۲$$

روش دوم: به کمک نمودار ون نیز می‌توان این مسئله را حل کرد:



$$۲۴-x+x+۱۸-x=۲۶\Rightarrow x=۱۶$$

$\Rightarrow$ تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند $=۱۸-x=۱۸-۱۶=۲$

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

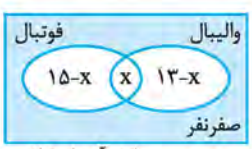
فرض کنیم A و B به‌ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشند که در کلاس‌های ادبیات و عربی شرکت کرده‌اند. می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم. داریم: $n(A)=۳۵$ ، $n(B)=۳۱$ ، $n(A\cap B)=۲۳$

$$\Rightarrow n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=۵۱-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=۵۱-(۳۵+۳۱-۲۳)=۸$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم که x نفر، هم عضو تیم فوتبال و هم عضو تیم والیبال باشند، با توجه به این‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو است، داریم:



دانش‌آموزان کلاس

$$۱۵-x+x+۱۳-x=۲۳\Rightarrow ۲۸-x=۲۳\Rightarrow x=۵$$

بنابراین $۸=۵-۱۳$ نفر فقط عضو تیم والیبال و $۱۰=۵-۱۵$ نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند و درنتیجه $۱۸=۸+۱۰$ نفر دقیقاً عضو یکی از تیم‌های فوتبال یا والیبال می‌باشند.

۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴

هر یک از اعضای مجموعهٔ A، یک واحد از مضرب‌های طبیعی ۷ بزرگ‌تر هستند و هر یک از اعضای مجموعهٔ B، سه واحد از مضرب‌های طبیعی ۷ کم‌تر می‌باشند. در واقع داریم:

$$A=\{۸,۱۵,۲۲,۲۹,\cdots\}$$

$$B=\{۴,۱۱,۱۸,۲۵,\cdots\}$$

هیچ‌کدام از اعداد ارائه شده در گزینهٔ (۲)، به مجموعه‌های A و B تعلق ندارند، زیرا:

$$۷n+۱=۴۱ \Rightarrow ۷n=۴۰ \Rightarrow n=\frac{۴۰}{۷} \notin \mathbb{N}$$

$$۷n+۱=۵۹ \Rightarrow ۷n=۵۸ \Rightarrow n=\frac{۵۸}{۷} \notin \mathbb{N}$$

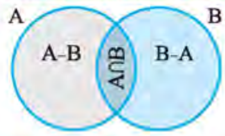
$$۷n-۳=۴۱ \Rightarrow ۷n=۴۴ \Rightarrow n=\frac{۴۴}{۷} \notin \mathbb{N}$$

$$۷n-۳=۵۹ \Rightarrow ۷n=۶۲ \Rightarrow n=\frac{۶۲}{۷} \notin \mathbb{N}$$

با کمی دقت معلوم می‌شود که $۶۷ = ۷\times۱۰ - ۳$، پس $۶۷ \in B$ و $۳۹ = ۷\times۶ - ۳$، پس $۳۹ \in B$ و $۷۴ = ۷\times۱۱ - ۳$ و $۸۵ = ۷\times۱۲ + ۱$،
در نتیجه $۷۴ \in B$ و $۸۵ \in A$

۵۲

با توجه به نمودار ون می‌توان نوشت:



$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۵=۲+n(B-A)+۲ \Rightarrow n(B-A)=۱$$

۵۳

با توجه به فرض مسئله $n(A\cup B)=۳n(B)$ ،$n(A)=\frac{۵}{۲}n(B)$ و $n(A\cap B)=۳$، بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۳n(B)=\frac{۵}{۲}n(B)+n(B)-۳$$

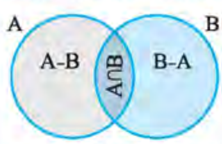
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}n(B)=۳ \Rightarrow n(B)=۶$$

تعداد اعضایی که حداقل به یکی از دو مجموعهٔ A یا B تعلق دارد برابر $n(A\cup B)$ می‌باشد که با توجه به فرض داریم:

$$n(A\cup B)=۳n(B)=۳\times۶=۱۸$$

۵۴

با توجه به نمودار ون، می‌توان نوشت:



$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

$$۴۰=۱۲+۱۸+n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

با توجه به نمودار ون داریم:

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=۱۲+۱۰=۲۲$$

$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=۱۸+۱۰=۲۸$$

حال اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو حذف کنیم، داریم:

$$n(A_۱)=n(A)-۹=۲۲-۹=۱۳$$

$$n(B_۱)=n(B)-۹=۲۸-۹=۱۹$$

$$n(A_۱\cap B_۱)=n(A\cap B)-۴=۱۰-۴=۶$$

پس خواهیم داشت:

$$n(A_۱\cup B_۱)=n(A_۱)+n(B_۱)-n(A_۱\cap B_۱)$$

$$=۱۳+۱۹-۶=۲۶$$

۵۵

فرض کنیم $A_۱$ مجموعهٔ حاصل از اضافه کردن ۱۰ عضو جدید به مجموعهٔ A باشد، در این صورت $n(A_۱)=n(A)+۱۰$ و طبق فرض $n(A_۱\cap B)=۹+n(A\cap B)$ می‌باشد، بنابراین:

$$n(B\cup A_۱)=n(B)+n(A_۱)-n(A_۱\cap B)$$

$$=n(B)+n(A)+۱۰-(۹+n(A\cap B))$$

$$=\underbrace{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}_{n(A\cup B)}+۱=۲۵+۱=۲۶$$

۵۶

اگر مجموعهٔ جدید که از حذف ۱۶ عضو از مجموعهٔ A به دست‌می‌آید را با $A_۱$ نمایش دهیم، بنابر فرض، اطلاعات زیر را داریم:

$$n(A)=۳۶ \Rightarrow n(A_۱)=۳۶-۱۶=۲۰$$

$$n(B)=۲۸ \text{ ، } n(A\cap B)=۱۵ \Rightarrow n(A_۱\cap B)=۱۵-۹=۶$$

اکنون باید حاصل $n(A_۱\cup B)$ را بیابیم. پس:

$$n(A_۱\cup B)=n(A_۱)+n(B)-n(A_۱\cap B)=۲۰+۲۸-۶=۴۲$$

۵۷

فرض کنیم A و B به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع باشند به‌طوری که اعضای آن‌ها بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند، در این‌صورت:

$$U=\{۱,۲,\dots,۹۹\} \text{ ، } A=\{۳,۶,۹,\dots,۹۹\} \Rightarrow n(A)=۳۳$$

$$B=\{۵,۱۰,۱۵,\dots,۹۵\} \Rightarrow n(B)=۱۹$$

هم مضرب۳ و هم مضرب۵ : $A\cap B=\{۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,۹۰\}$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۶$$

می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم، داریم:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))$$

$$=۹۹-(۳۳+۱۹-۶)=۵۳$$

۵۸

الگو را می‌توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

با توجه به دسته بندی فوق داریم:

$$a_۱=۱^۲+۴ \text{ ، } a_۲=۲^۲+۴ \text{ ، } a_۳=۳^۲+۴$$

بنابراین $a_n=n^۲+۴$ و در نتیجه $a_{۱۵}=۱۵^۲+۴=۲۲۹$.

۵۹

با توجه به الگوی داده شده داریم: $a_۱=۱+۱$ ، $a_۲=۳+۱$ ، $a_۳=۶+۱$

می دانیم اعداد ۱، ۳ ، ۶ و ... همان جملات دنبالهٔ مثلثی هستند که جملهٔ عمومی آن‌ها از رابطهٔ $a_n=\frac{n(n+1)}{۲}$ به‌دست می‌آید. پس‌می‌توان گفت جملهٔ عمومی این دنباله از رابطهٔ $a_n=\frac{n(n+1)}{۲}+۱$ به دست می‌آید.

بنابراین:

$$a_{۲۰}=\frac{۲۰\times۲۱}{۲}+۱=۲۱۱$$