درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۱ (دهم)

ویراست دوم

حسن محمد بیگی، امیر محمد هویدی

نشر الگو

پیش‌گفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای هندسهٔ سال دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعهٔ این کتاب، تقریباً هر آن‌چه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست برخی پرسش‌های ویراست قبلی را حذف کرده‌ایم و البته تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دستهٔ اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دستهٔ دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دستهٔ اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دستهٔ سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دستهٔ دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعهٔ هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «هندسه دهم سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد ویراستاری خانم‌ها مریم موحدی‌مهر (ویراست اول) و عاطفه ربیعی، ؟؟؟ گودرزی و هاله ایمانی (ویراست اول و دوم) و خانم نسیم نوریان برای صفحه‌آرایی کتاب تشکر کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب و واحد حروف‌چینی به سرپرستی خانم سکینه مختار که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول: ترسیم‌های هندسی ۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۲
درس دوم: استدلال ۱۶
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۷

فصل دوم: قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن

درس اول: نسبت و تناسب در هندسه ۳۴
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۳۹
درس دوم: قضیه‌ی تالس ۴۶
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۵۵
درس سوم: تشابه مثلث‌ها ۶۴
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۷۲
درس چهارم: کاربردهایی از قضیه‌ی تالس و تشابه مثلث‌ها ۸۰
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۸۶

فصل سوم: چندضلعی‌ها

درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها ۹۸
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۱۸
درس دوم: مساحت و کاربردهای آن ۱۲۹
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۴۵

فصل چهارم: تجسم فضایی

درس اول: خط، نقطه و صفحه ۱۵۸
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۵
درس دوم: تفکر تجسمی ۱۷۱
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۲

فصل پنجم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۱۹۲

فصل ششم: پاسخنامهٔ کلیدی

پاسخنامهٔ کلیدی ۳۰۲

کنکور سراسری سال ۱۳۹۹

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۳۰۵
پاسخ‌های تشریحی ۳۰۶

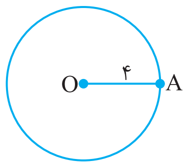
فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول: ترسیم‌های هندسی

در این درس با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.

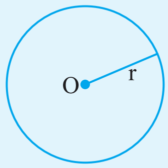
رسم دایره و ویژگی‌های آن



اگر دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنیم و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، شعاع این دایره ۴ است. نکته‌ای که در این رسم وجود دارد این است که نقطه‌های روی این دایره نقطه‌هایی هستند که تماماً از O به فاصلهٔ ۴ هستند و برعکس، یعنی هر نقطه‌ای که از O به فاصلهٔ ۴ باشد، باید روی این دایره قرار بگیرد. یعنی، با توجه به شکل «A روی دایره است، پس $OA=۴$».

نتیجه

برای پیدا کردن تمام نقطه‌هایی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معلوم r هستند، کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم.

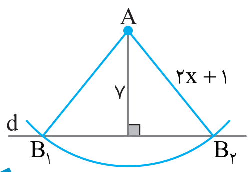


تست ۱

خط d و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۷ از این خط مفروض است. اگر بر روی این خط دو نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ $۲x+۱$ باشند، x کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل



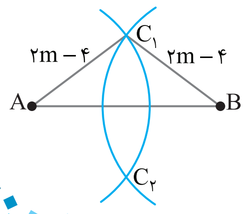
نقطه‌هایی که از A به فاصلهٔ $۲x+۱$ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع $۲x+۱$ قرار دارند. چون روی خط d دو نقطه وجود دارند که از A به فاصلهٔ $۲x+۱$ هستند، پس خط d باید دایرهٔ به مرکز A و شعاع $۲x+۱$ را در دو نقطه قطع کند، یعنی باید $۲x+۱>۷$. پس $۲x>۶$، در نتیجه $x>۳$.

تست ۲

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۸ از یکدیگر مفروض‌اند. اگر در صفحه دو نقطه پیدا شوند که از A و B به فاصلهٔ $۲m-۴$ باشند، حدود m کدام است؟

۱) $m>۵$ ۲) $m>۸$ ۳) $m>۴$ ۴) $m>۶$

راه‌حل



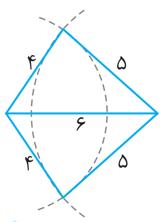
برای پیدا کردن نقطه‌هایی که هم از A و هم از B به فاصلهٔ $۲m-۴$ هستند، کافی است نقطه‌های برخورد دو کمان به مرکزهای A و B و به شعاع $۲m-۴$ را به‌دست آوریم.
این دو کمان، زمانی یکدیگر را قطع می‌کنند که $۲m-۴$ از نصف فاصلهٔ A و B بیشتر باشد، یعنی $۲m-۴>۴$. پس $۲m>۸$، در نتیجه $m>۴$.

تست ۳

برای رسم مثلثی به طول ضلع‌های ۴، ۵ و ۶ حداقل به رسم چند کمان نیاز داریم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) چنین مثلثی وجود ندارد.

راه‌حل



پاره‌خطی به طول ۶ در نظر می‌گیریم. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ باز می‌کنیم و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌ایم، کمانی می‌زنیم (کمان اول).
اکنون دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۵ باز می‌کنیم و به مرکز سر دیگر پاره‌خط کمانی می‌زنیم (کمان دوم).
محل برخورد این کمان‌ها و دو سر پاره‌خطی که اول رسم کردیم، سه رأس مثلث مورد نظر هستند.

نکته

فرض کنید a ، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای اینکه مثلثی به طول ضلع‌های a ، b و c وجود داشته باشد، باید

$$a<b+c, \quad b<a+c, \quad c<a+b$$

تست ۴

با معلومات $AB=۱۴$ ، $AC=۸$ و $BC=۶$ چند مثلث قابل ترسیم است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

راه‌حل در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، در اینجا اندازهٔ AB از مجموع اندازه‌های AC و BC کوچک‌تر نیست $(۱۴ \not< ۸+۶)$، پس چنین مثلثی وجود ندارد.

تست ۵

با کدام‌یک از سه طول داده شده می‌توان یک مثلث ساخت؟ $(a>۱)$

۱) $۴, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$　　۲) $\sqrt{۱۰}, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$　　۳) $\sqrt{۵}, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$　　۴) $a+۱, a-۱, ۲a$

راه‌حل با عددهای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نمی‌توان مثلثی ساخت، زیرا

گزینهٔ (۱): $\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \not> ۴$　　**گزینهٔ (۲):** $\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \not> \sqrt{۱۰}$　　**گزینهٔ (۴):** $(a+۱)+(a-۱) \not> ۲a$

اما عددهای گزینهٔ (۳) در شرط‌های وجود مثلث صدق می‌کنند، یعنی هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر است:

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}>\sqrt{۵}, \quad \sqrt{۲}+\sqrt{۵}>\sqrt{۳}, \quad \sqrt{۳}+\sqrt{۵}>\sqrt{۲}$$

تست ۶

در مثلث ABC، $AB=۷x$ ، $AC=۲x-۱$ و $BC=۴x+۲$. حدود x برای آنکه مثلث ABC وجود داشته باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}<x<۱$　　۲) $\frac{۳}{۵}<x<۲$　　۳) $-\frac{۱}{۳}<x<۲$　　۴) $\frac{۳}{۵}<x<۱$

راه‌حل با توجه به نکتهٔ بیان شده، باید

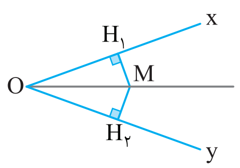
$$AB<AC+BC, \quad BC<AB+AC, \quad AC<AB+BC$$

یعنی

$$۷x<۶x+۱ \Rightarrow x<۱, \quad ۴x+۲<۹x-۱ \Rightarrow \frac{۳}{۵}<x, \quad ۲x-۱<۱۱x+۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}<x$$

با اشتراک گرفتن از نابرابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم $\frac{۳}{۵}<x<۱$.

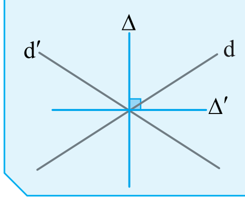
خاصیت اصلی نیمساز



هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

به عبارت دیگر در شکل مقابل، اگر M روی نیمساز زاویهٔ xOy باشد، آن‌گاه $MH_۱=MH_۲$ و اگر $MH_۱=MH_۲$ ، آن‌گاه M روی نیمساز زاویهٔ xOy است.

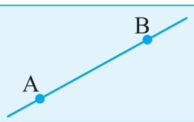
نتیجه



مجموعهٔ تمام نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله هستند، نیمسازهای زاویه‌های این دو خط هستند که بر هم عمودند (خط‌های Δ و Δ' را در شکل ببینید).

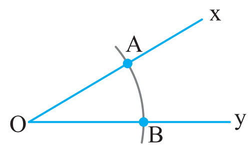
قبل از بیان روش ترسیم نیمساز به نکتهٔ زیر توجه کنید.

نکته



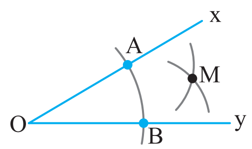
برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل ۲ نقطه از خط را باید داشته باشیم.

ترسیم نیمساز



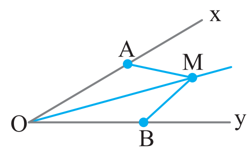
می‌خواهیم نیمساز زاویهٔ xOy را رسم کنیم.

به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند.



به مرکز A و شعاعی بیش از نصف اندازهٔ پاره‌خط AB کمانی رسم می‌کنیم و به همین شعاع و به مرکز B کمانی دیگر رسم می‌کنیم.

محل برخورد این دو کمان را M می‌نامیم.



OM نیمساز زاویهٔ xOy است.

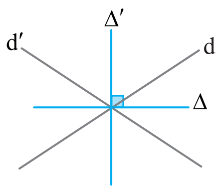
دلیل: دو مثلث OAM و OBM همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض).

تست ۷

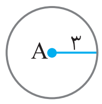
دو خط متقاطع d و d' و نقطهٔ A مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی در صفحه که از d و d' به یک فاصله و از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ هستند، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۴　　۴) نامتناهی

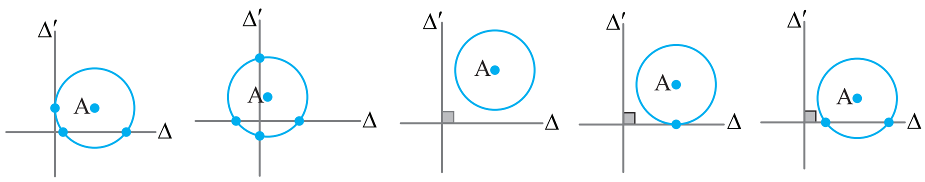
راه‌حل



با توجه به شکل، دو خط Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و d' هستند. تمام نقطه‌های روی خط‌های Δ و Δ' از خط‌های d و d' به یک فاصله هستند.



از طرف دیگر، نقطه‌هایی که از A به فاصلهٔ ۳ هستند، نقطه‌های روی دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۳ هستند.
پس نقطهٔ برخورد نیمسازهای d و d' با این دایره جواب است، که براساس حالت‌های زیر جواب‌های متفاوتی به‌دست می‌آید.



دو جواب　　یک جواب　　بدون جواب　　چهار جواب　　سه جواب

تست ۸

خط مورب L، دو خط موازی d و d' را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. نقطهٔ برخورد نیمسازهای A و B کدام ویژگی را دارد؟

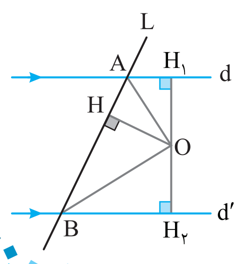
۱) نسبت فاصله‌هایش از دو خط d و d' برابر ۱ به ۲ است.

۲) فقط از دو خط d و d' به فاصلهٔ یکسان قرار دارد.

۳) از هر سه خط d، d' و L به یک فاصله است.

۴) نسبت فاصله‌هایش از دو خط d و d' برابر ۲ به ۳ است.

راه‌حل



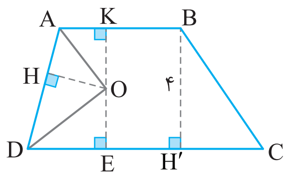
اگر نقطهٔ O نقطهٔ برخورد نیمسازهای A و B باشد، چون هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس $OH = OH_1$ و $OH = OH_2$. بنابراین $OH = OH_1 = OH_2$، پس O از هر سه خط d، d' و L به یک فاصله است.

تست ۹

ارتفاع ذوزنقه‌ای برابر ۴ است. مجموع فاصله‌های نقطهٔ برخورد دو نیمساز دو زاویهٔ مجاور به ساق این ذوزنقه از دو قاعده و این ساق برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

راه‌حل



شکل مسئله به صورت مقابل است. اگر O نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و D باشد، آن‌گاه

$$\left\{\begin{array}{l} O \text{ روی نیمساز } \hat{A} \text{ قرار دارد} \Rightarrow OH=OK \\ O \text{ روی نیمساز } \hat{D} \text{ قرار دارد} \Rightarrow OE=OH \end{array}\right. \Rightarrow OH=OK=OE$$

همان‌طور که معلوم است $OK+OE=BH'$ و چون $OK=OE$ پس $OK=\frac{BH'}{۲}$.

بنابراین $OH+OK+OE=\frac{۳BH'}{۲}=۳(\frac{۴}{۲})=۶$.

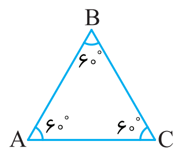
تست ۱۰

چندتا از زاویه‌های ۱۵°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۷۵° به کمک خط‌کش و پرگار قابل رسم‌اند؟

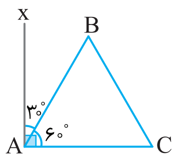
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل

تمام زاویه‌های داده شده را می‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

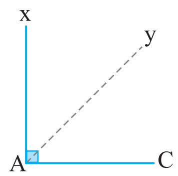


۱) زاویهٔ ۶۰°: کافی است مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنیم. در این حالت زاویهٔ BAC برابر ۶۰° است.



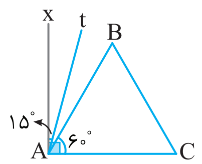
۲) زاویهٔ ۳۰°: از نقطهٔ A، عمود Ax را بر AC رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). در این صورت

$$B\hat{A}x=۳۰^\circ$$



۳) زاویهٔ ۴۵°: اگر نیمساز زاویهٔ قائمهٔ CAx را رسم کنیم (Ay در شکل)، در این صورت

$$x\hat{A}y=۴۵^\circ$$



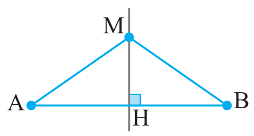
۴) زاویهٔ ۱۵°: نیمساز زاویهٔ BAx را رسم می‌کنیم (At در شکل). در این صورت

$$x\hat{A}t=۱۵^\circ$$

۵) زاویهٔ ۷۵°: به شکل قسمت (۴) نگاه کنید:

$$t\hat{A}C=t\hat{A}B+B\hat{A}C \Rightarrow ۱۵^\circ+۶۰^\circ=۷۵^\circ$$

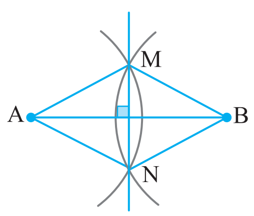
خاصیت اصلی عمودمنصف



هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر M روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه $MA=MB$ و برعکس، اگر $MA=MB$، آن‌گاه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

ترسیم عمودمنصف



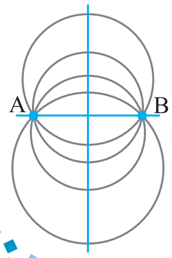
می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف AB باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع کمان می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع می‌کنند. چون M و N از A و B به یک فاصله هستند، پس خطی که از M و N می‌گذرد عمودمنصف پاره‌خط AB است.

تست ۱۱

از دو نقطهٔ متمایز A و B نامتناهی دایره می‌گذرد. مرکز این دایره‌ها همواره کجا واقع هستند؟

۱) روی عمودمنصف AB
۲) روی دو خط موازی AB
۳) روی دایره‌ای به قطر AB
۴) روی هر خط گذرنده از وسط AB

راه‌حل: مرکز همهٔ دایره‌هایی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند از این دو نقطه به یک فاصله‌اند. پس مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند.

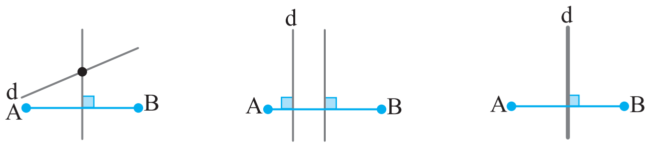


تست ۱۲

پاره‌خط AB و خط d مفروض‌اند. تعداد نقطه‌های روی خط d که از نقطه‌های A و B به یک فاصله هستند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

راه‌حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. بنابراین نقطه‌های مورد نظر محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط d هستند. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:



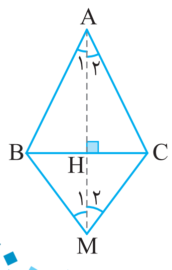
نامتناهی جواب — بدون جواب — یک جواب

تست ۱۳

دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. خط گذرا از دو رأس مقابل این دو مثلث کدام ویژگی را دارد؟

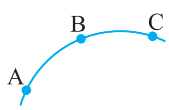
۱) روی نیمساز زاویهٔ مقابل به قاعدهٔ مشترک است.
۲) روی عمودمنصف قاعدهٔ مشترک است.
۳) بر قاعدهٔ مشترک عمود است.
۴) هر سه گزینهٔ (۱)، (۲) و (۳) می‌توانند درست باشند.

راه‌حل: مطابق شکل، فرض می‌کنیم دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و MBC در قاعدهٔ BC مشترک‌اند. چون $AB=AC$، پس A روی عمودمنصف BC است و چون $MB=MC$، پس M روی عمود منصف BC است. بنابراین AM عمودمنصف قاعدهٔ BC است. از طرف دیگر، دو مثلث ABM و ACM به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند. بنابراین $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{M}_1=\hat{M}_2$، پس AM نیمساز است. در ضمن واضح است که AM بر قاعدهٔ مشترک BC عمود است.



تست ۱۴

در شکل مقابل، قسمتی از یک دایره رسم شده است. برای پیدا کردن مرکز این دایره کدام روش درست است؟



۱) رسم ارتفاع‌های مثلث ABC
۲) رسم نیمسازهای مثلث ABC
۳) پیدا کردن قرینهٔ B نسبت به AC
۴) رسم عمودمنصف‌های AB و AC

راه‌حل: چون A، B و C روی دایره قرار دارند، پس فاصلهٔ مرکز دایره تا این سه نقطه یکسان است. چون مرکز دایره از این سه نقطه به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف‌های AB و AC قرار دارد.

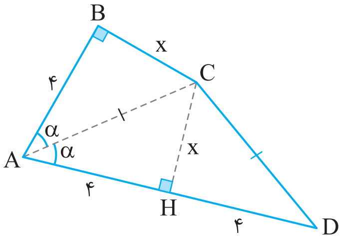
تست ۱۵

در چهارضلعی ABCD، $\hat{B}=90^\circ$. رأس C محل تقاطع نیمساز زاویهٔ داخلی A و عمودمنصف ضلع AD است، $AB=4$ و مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۱۸ است. محیط چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۴

راه‌حل

نقطهٔ C روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس $BC = CH = x$ و با توجه به همنهشت بودن دو مثلث ABC و AHC نتیجه می‌شود $AB = AH = ۴$. از طرف دیگر نقطهٔ C روی عمودمنصف ضلع AD قرار دارد، پس $AC = CD$ و $AH = HD = ۴$. با توجه به شکل،



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \Rightarrow ۱۸ = \frac{۴x}{۲} + \frac{۸x}{۲} \Rightarrow x = ۳$$

$$\Delta ABC : AC^{۲} = x^{۲} + AB^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$$

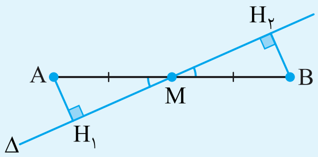
بنابراین محیط چهارضلعی ABCD برابر است با

$$\text{محیط} = AB + BC + CD + DA = ۴ + ۳ + ۵ + ۸ = ۲۰$$

نکته

پاره‌خط AB را در نظر بگیرید. خط دلخواه Δ از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. دو نقطهٔ A و B از این خط به یک فاصله‌اند (این مطلب با همنهشتی دو مثلث AMH_1 و BMH_2 به سادگی ثابت می‌شود). به عبارت دیگر

«اگر خطی از وسط یک پاره‌خط بگذرد، آن‌گاه دو سر پاره‌خط از آن خط به یک فاصله‌اند.»



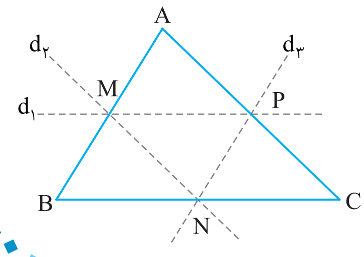
تست ۱۶

در صفحهٔ مثلث ABC چند خط وجود دارد که سه رأس مثلث از آن خطوط به یک فاصله‌اند؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۳ **۴)** نامتناهی

راه‌حل

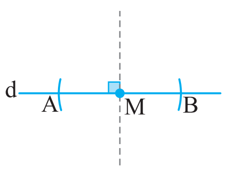
دیدیم که اگر خطی از وسط یک پاره‌خط بگذرد، آن‌گاه دو سر پاره‌خط از آن به یک فاصله‌اند، پس سه رأس مثلث از خطی که از وسط دو ضلع مثلث می‌گذرد به یک فاصله هستند. در نتیجه سه خط با چنین ویژگی وجود دارند (خطوط d_1، d_2 و d_3 را در شکل ببینید).



رسم خط عمود بر یک خط

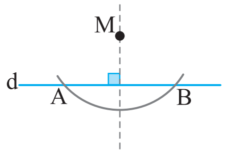
حالت اول: نقطه روی خط است

به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d را A و B می‌نامیم. عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که از M می‌گذرد و بر d عمود است.



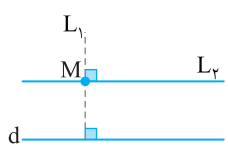
حالت دوم: نقطه خارج خط است

به مرکز M کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند. عمودمنصف AB از M می‌گذرد و بر d عمود است.



رسم خطی موازی یک خط، از نقطه‌ای خارج آن

از نقطهٔ M خط L_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر L_1 عمود باشد. چون دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، پس L_2 خطی موازی d است که از M می‌گذرد.

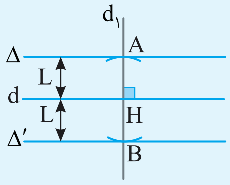


نکته

مجموعهٔ نقطه‌هایی که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله هستند خطی است موازی آن‌ها و به فاصله‌ای برابر از آن‌ها (خط Δ را در شکل ببینید).

نکته

خط d را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن تمام نقطه‌هایی که از این خط به فاصلهٔ معلوم L هستند، خط d_1 را عمود بر d رسم می‌کنیم. به مرکز H (محل برخورد d و d_1) و شعاع L دایره‌ای رسم می‌کنیم تا d_1 را در نقطه‌های A و B قطع کند. خط‌های گذرنده از A و B و موازی d مجموعهٔ نقطه‌هایی هستند که از d به فاصلهٔ L هستند (دو خط Δ و Δ' در شکل).

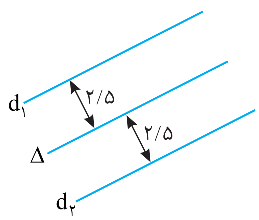


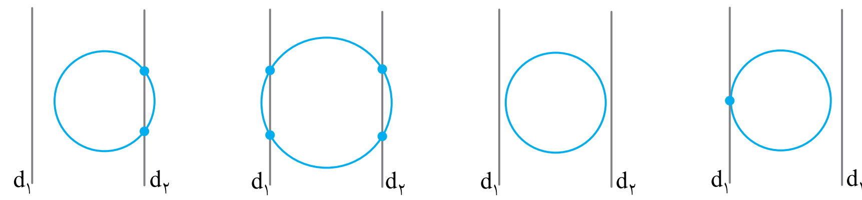
تست ۱۷

حداکثر چند نقطه روی دایرهٔ C به شعاع R وجود دارد که از خط Δ به فاصلهٔ ۲/۵ هستند؟

۱) دو نقطه ۲) سه نقطه ۳) یک نقطه ۴) چهار نقطه

راه‌حل نقطه‌هایی از صفحه که از خط Δ به فاصلهٔ ۲/۵ هستند، دو خط موازی Δ هستند (خطوط d_1 و d_2 در شکل را ببینید). جواب‌های مسئله، محل برخورد d_1 و d_2 با دایرهٔ C است که با توجه به حالت‌های زیر، جواب‌ها را مشخص کرده‌ایم.





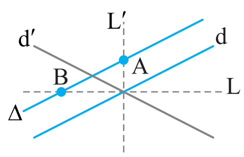
دو جواب چهار جواب بدون جواب یک جواب

تست ۱۸

دو خط d و d' متقاطع هستند و خط Δ موازی یکی از این دو خط است. چند نقطه روی Δ وجود دارد که از d و d' به یک فاصله هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

راه‌حل با توجه به شکل مقابل، L و L' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و d' هستند. می‌دانیم هر نقطه روی L و L' از d و d' به یک فاصله است. در نتیجه نقطهٔ برخورد Δ با این دو خط جواب است. از طرف دیگر، چون Δ با d یا d' موازی است، پس حتماً L و L' را قطع می‌کند و مسئله دو جواب دارد.



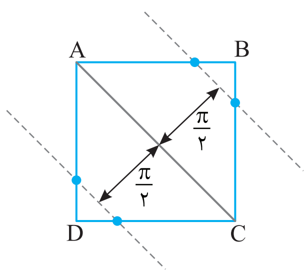
تست ۱۹

مربع $ABCD$ به طول ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $\frac{\pi}{۲}$ است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل نقطه‌هایی که از قطر AC به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}$ هستند، دو خط موازی با AC و به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}$ از آن هستند. پس تعداد نقطه‌های برخورد این خط‌ها با مربع، تعداد جواب‌ها است.

طول قطر مربع به ضلع ۳ برابر $۳\sqrt{۲}$ است و چون در مربع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و $\frac{\pi}{۲} < \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$، پس دو خط موازی AC مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.



رسم مثلث

گاهی در مسئله‌ها اطلاعاتی را در مورد مثلث به ما می‌دهند و می‌خواهند که تعداد مثلث‌های قابل رسم با این اطلاعات را به‌دست آوریم.

دربارهٔ این مسئله‌ها به دو مطلب زیر دقت کنید:

۱) در مسئله‌های ترسیم، شکل‌های همنهشت را یکی حساب می‌کنیم.

۲) بد نیست قراردادهای زیر را بدانید:

در مثلث ABC

الف) طول ضلع‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$BC=a, \quad AC=b, \quad AB=c$$

ب) طول ارتفاع‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$AH_۱=h_a, \quad BH_۲=h_b, \quad CH_۳=h_c$$

پ) طول میانه‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

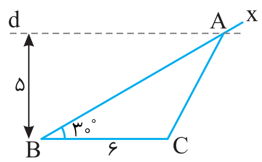
$$AM_۱=m_a, \quad BM_۲=m_b, \quad CM_۳=m_c$$

تست ۲۰

چند مثلث مانند ABC وجود دارد که در آن $BC=۶$، $\hat{B}=۳۰^\circ$ و ارتفاع AH به طول ۵ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

راه‌حل



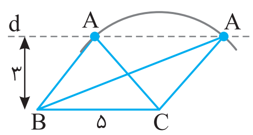
پاره‌خط BC به طول ۶ و زاویهٔ xBC به اندازهٔ ۳۰° را رسم می‌کنیم.
چون طول AH برابر ۵ است، پس فاصلهٔ A از ضلع BC برابر ۵ است، یعنی A روی خطی موازی BC و به فاصلهٔ ۵ از آن قرار دارد. در نتیجه خط d را موازی BC و به فاصلهٔ ۵ از آن رسم می‌کنیم (خط d در شکل). محل برخورد این خط با Bx رأس A است. بنابراین مسئله یک جواب دارد.

تست ۲۱

چند مثلث مانند ABC می‌توان رسم کرد که در آن $BC=۵$، $AC=۴$ و طول ارتفاع AH برابر ۳ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل



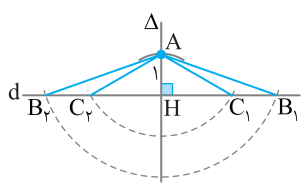
ابتدا پاره‌خط BC را به طول ۵ رسم می‌کنیم. خط d را موازی BC و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌کنیم (رأس A روی این خط است).
اکنون به مرکز C و شعاع ۴ کمان می‌زنیم. محل برخورد این کمان با خط d رأس A است. چون این کمان d را در دو نقطه قطع می‌کند، مسئله دو جواب دارد.

تست ۲۲

با معلومات $h_a=۱$، $b=۲$ و $c=۳$ (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم)، چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) صفر

راه‌حل



با توجه به اطلاعات مسئله، $AC=۲$، $AB=۳$ و ارتفاع AH به طول ۱ است. خط دلخواه d را رسم می‌کنیم. خط دلخواه Δ را عمود بر d رسم می‌کنیم و محل برخورد Δ و d را H می‌نامیم. به مرکز H و شعاع ۱ کمان می‌زنیم و محل برخورد آن با Δ را رأس A در نظر می‌گیریم. به مرکز A و شعاع ۲ کمانی می‌زنیم و محل برخورد آن با d را رأس C می‌نامیم (دقت کنید که این کمان خط d را در دو نقطه قطع می‌کند. ما آن‌ها را در شکل $C_۱$ و $C_۲$ نامیده‌ایم).
اکنون به مرکز A و شعاع ۳ کمان دیگری می‌زنیم و محل برخورد آن با خط d را رأس B می‌نامیم ($B_۱$ و $B_۲$ را در شکل ببینید). در شکل ۴ مثلث دیده می‌شود که دوتا از آن‌ها با دوتای دیگر همنهشت‌اند، پس مسئله دو جواب دارد.

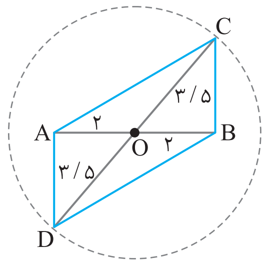
رسم چندضلعی‌ها

تست ۲۳ چند متوازی‌الاضلاع وجود دارد که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

راه‌حل

می‌دانیم چهارضلعی که قطرهای آن منصف هم هستند، متوازی‌الاضلاع است و برعکس. پاره‌خط AB به طول ۴ را رسم می‌کنیم. O وسط این پاره‌خط است. دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{۷}{۲}=۳/۵$ رسم می‌کنیم. هر قطر دلخواه از این دایره که بر AB منطبق نیست یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع است و AB قطر دیگر آن است. ACBD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است (شکل را ببینید). چون این دایره نامتناهی قطر دارد پس نامتناهی متوازی‌الاضلاع با ویژگی‌های مسئله می‌توان رسم کرد.

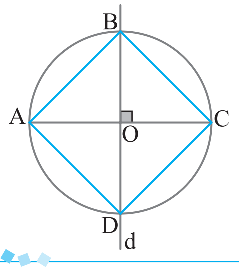


تست ۲۴ طول قطر مربعی برابر ۵ است. چند مربع با این ویژگی می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

راه‌حل

پاره‌خط AC به طول ۵ را رسم می‌کنیم. خط d، عمودمنصف AC، را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط (d) با پاره‌خط AC را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع $\frac{۵}{۲}=۲/۵$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d را نقطه‌های B و D می‌نامیم. مربع ABCD جواب مسئله است. واضح است که چنین مربعی منحصر به فرد است.

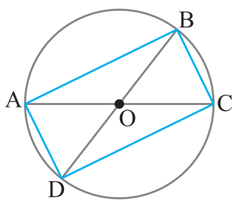


تست ۲۵ چند مستطیل با قطر به طول ۶ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

راه‌حل

می‌دانیم در مستطیل قطرها با هم برابر و منصف یکدیگرند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{۶}{۲}=۳$ رسم می‌کنیم. دو قطر دلخواه از این دایره را رسم می‌کنیم (AC و BD در شکل). دو سر این قطرها رأس‌های مستطیل مورد نظر هستند (ABCD در شکل). چون دایره به تعداد نامتناهی قطر دارد، پس به تعداد نامتناهی مستطیل با این ویژگی‌ها می‌توان رسم کرد.



تست ۲۶ طول ضلع یک لوزی ۵ و طول یکی از قطرهای آن ۶ است. چند لوزی با این ویژگی می‌توان رسم کرد؟

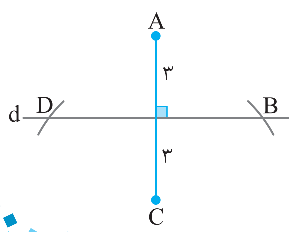
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

راه‌حل

این لوزی منحصر به فرد است. روش رسم به صورت زیر است:

ابتدا پاره‌خط AC به طول ۶ را رسم می‌کنیم.

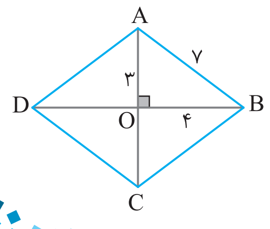
عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم (خط d). به مرکز A یا C و شعاع ۵ کمان می‌زنیم تا عمودمنصف AC را در دو نقطهٔ B و D قطع کند (شکل دوم را ببینید). چهارضلعی ABCD لوزی مورد نظر است.



تست ۲۷ **چند لوزی با قطرهای به طول‌های ۸ و ۶ و طول ضلع ۷ می‌توان رسم کرد؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی

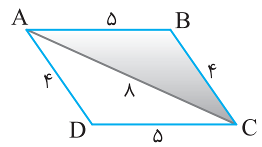
راه‌حل مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. می‌دانیم در لوزی قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. پس با توجه به اطلاعات داده شده و شکل مقابل طول ضلع‌های مثلث OAB برابر ۳، ۴ و ۷ است. از طرف دیگر، در لوزی قطرها بر هم عمودند. پس این مثلث (مثلث OAB) قائم‌الزاویه است. اما طول ضلع‌های این مثلث در قضیهٔ فیثاغورس صدق نمی‌کنند $(۷^۲ \neq ۳^۲ + ۴^۲)$، درنتیجه چنین لوزی‌ای وجود ندارد.



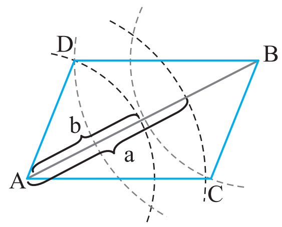
تست ۲۸ **چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد، که در آن طول ضلع‌ها ۴ و ۵ و طول یکی از قطرهای آن ۸ باشد؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی

راه‌حل فرض می‌کنیم ABCD متوازی‌الاضلاع مورد نظر باشد. چون در مثلث ABC طول سه ضلع معلوم است و در نامساوی مربوط به طول ضلع‌ها صدق می‌کنند $(۸ < ۵ + ۴)$ این مثلث قابل رسم و منحصر به فرد است. با استدلالی مشابه مثلث ACD به صورت منحصر به فرد قابل رسم است. پس متوازی‌الاضلاع ABCD وجود دارد و منحصر به فرد است.



تست ۲۹ **پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک بار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل دو نقطه از نقطه‌های برخورد را C و D می‌نامیم. در کدام حالت ACBD متوازی‌الاضلاع است؟**



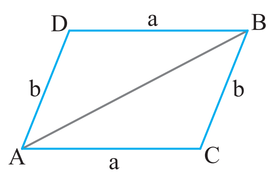
۱) $a = ۲$ ، $b = ۱$ و $AB = ۶$

۲) $a = ۴$ ، $b = ۳$ و $AB = ۵$

۳) $a = ۳$ ، $b = ۲$ و $AB = ۵$

۴) هر سه مورد

راه‌حل برای سادگی کار شکل را بدون رسم کمان‌ها در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که در چهارضلعی ACBD ، ضلع‌های مقابل با هم برابرند و می‌دانیم اگر در یک چهارضلعی ضلع‌های مقابل با هم برابر باشند، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. پس ACBD متوازی‌الاضلاع است. اما نکته‌ای که در این مسئله وجود دارد آن است که مثلث ABC باید قابل رسم باشد، یعنی $AB < a + b$. در بین گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۲) در این رابطه صدق می‌کند.



فصل اول

درس اول: ترسیم‌های هندسی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ترسیم‌های هندسی ۱

۱- دایره‌ای به مرکز O و قطر ۸ مفروض است. مجموعهٔ تمام نقطه‌هایی که وسط شعاع‌های این دایره هستند، کدام شکل است؟

۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴
۲) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲
۳) ۴ رأس یک مربع به مرکز O و قطر ۴
۴) رأس‌های تمام مربع‌های به مرکز O و قطر ۴

۲- نقطهٔ A بیرون خط d قرار دارد. روی خط d چند نقطه به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارد؟

۱) ۲
۲) حداکثر ۲
۳) ۱
۴) حداکثر ۱

۳- پاره‌خط AB به طول ۵ مفروض است. برای پیدا کردن نقطهٔ C به گونه‌ای که $AC=۴$ و $BC=۸$، حداقل به رسم چند کمان نیاز داریم؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۴- پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است. برای پیدا کردن نقطهٔ C به طوری که $AC=۵$ و $BC=۳$، حداقل به رسم چند کمان نیاز داریم؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۵- پاره‌خط AB را به طول ۱۰ در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارند که از نقطه‌های A و B به فاصلهٔ ۴ هستند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

۶- پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. برای پیدا کردن نقطهٔ C به طوری که $AC=۵$ و $BC=۳$، حداقل به رسم چند کمان نیاز داریم؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۷- محدودهٔ x برای آنکه عددهای $۴(x-۱)$، $۲x$ و $x+۵$ طول ضلع‌های یک مثلث باشند، کدام است؟

۱) $x>\frac{۹}{۵}$
۲) $\frac{۹}{۵}<x<۹$
۳) $۰<x<۹$
۴) $-\frac{۱}{۳}<x<۹$

۸- دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. دایره‌ای به شعاع دلخواه و مرکز محل برخورد این دو خط رسم شده است. چند نقطه روی این دایره وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله هستند؟

۱) دقیقاً ۲ نقطه
۲) حداکثر ۲ نقطه
۳) دقیقاً ۴ نقطه
۴) حداکثر ۴ نقطه

۹- دایره‌ای درون زاویهٔ xOy است. بر روی این دایره چند نقطه وجود دارد که از ضلع‌های زاویهٔ xOy به یک فاصله هستند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) ممکن هستند.

۱۰- در صفحهٔ مثلث ABC چند نقطه وجود دارد که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله هستند، همچنین از دو ضلع AB و BC و یا امتداد آن‌ها به یک فاصله هستند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

۱۱- برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB نیاز به زدن چند کمان است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۱۲- دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ مفروض است. چند نقطه روی این دایره وجود دارد که از دو نقطهٔ معلوم A و B به یک فاصله هستند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) حداکثر ۲

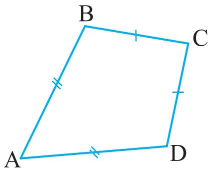
۱۳- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مرکز دایره از عمودمنصف AB چقدر است (مرکز دایره را O فرض کنید)؟

۱) صفر
۲) $\frac{AB}{۲}$
۳) $\frac{OA+OB}{۲}$
۴) AB

۱۴- سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره قرار دارند. در این صورت مرکز دایره چگونه مشخص می‌شود؟

۱) نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های CAB و BCA
۲) نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های AB و BC
۳) نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ ABC و عمودمنصف پاره‌خط AB
۴) نقطهٔ برخورد خط‌های AB و AC

۱۵- در چهارضلعی ABCD مطابق شکل چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟



الف) قطر AC نیمساز زاویهٔ C است. ب) قطر BD نیمساز زاویهٔ B است.

پ) قطر AC روی عمودمنصف BD است. ت) قطر BD روی عمودمنصف AC است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶- دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند. چند نقطه روی پاره‌خط AB وجود دارد که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۱۷- دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی از این صفحه که از خط d به فاصلهٔ L بوده و از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشند، کدام‌یک نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

۱۸- دو خط $d_۱$ و $d_۲$ در یک صفحه مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی که روی $d_۲$ قرار دارند و از $d_۱$ به فاصلهٔ ۲ هستند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۱۹- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰- با داشتن سه زاویهٔ یک مثلث چند مثلث متمایز قابل رسم است؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۲۱- لوزی با طول قطرهای ثابت $d_۱$ و $d_۲$ با کدام شرط منحصر به فرد است؟

۱) $d_۱ \neq d_۲$ ۲) $d_۱ < d_۲$ ۳) $d_۱ = d_۲$ ۴) همواره منحصر به فرد است.

۲۲- چند مستطیل به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

۲۳- چند مستطیل به طول ضلع‌های ۴ و ۵ وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

۲۴- کدام چهارضلعی را نمی‌توان رسم کرد؟

۱) مستطیلی که طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۱۰ باشد.

۲) متوازی‌الاضلاعی که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

۳) مستطیلی که طول قطر آن ۱۰ و زاویهٔ بین دو قطر آن ۶۰° باشد.

۴) لوزی که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطر آن ۱۲ باشد.

۲۵- چند متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۶ و ۸ قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

۲۶- چند متوازی‌الاضلاع با طول ضلع‌های ۴ و ۵ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

۲۷- کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

۱) لوزی که یک ضلع آن به طول ۴ و اندازهٔ قطرهای آن ۶ و ۱۰ باشد، قابل رسم است.

۲) مربع به قطر $\sqrt{۵}$ به صورت یکتا قابل رسم است.

۳) از یک نقطه خارج یک خط در صفحه تنها دو خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۴) نقطه‌ای که از انتهای اضلاع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه قرار دارد.

ترسیم‌های هندسی (۲)

۲۸- دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه قرار دارند، نقطه‌های A و B در دو طرف خط d هستند. اگر فقط یک نقطه روی خط d وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ ۴ باشد و همچنین فقط یک نقطه روی خط d وجود داشته باشد که از B به فاصلهٔ ۶ باشد، طول پاره‌خط AB کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۲۹- با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ $(a > ۲, b > ۰)$

۱) a، b و $a+b+۱$ ۲) $a+۱$، $b+۱$ و $a+b$

۳) $a^۲$، $(a+۱)^۲$ و $۲a^۲+۳a+۱$ ۴) $a-۲$، $۲a$ و $۳a$

۳۰- محیط یک مثلث متساوی‌الساقین برابر با ۱۲ است. اندازهٔ ساق این مثلث کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۵

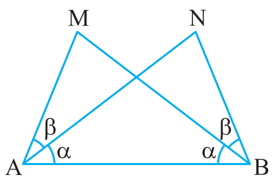
۳۱- در مثلث ABC نقطهٔ H (پای ارتفاع وارد بر ضلع BC) از ضلع‌های AB و AC به یک فاصله است. مثلث ABC لزوماً کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۳۲- در متوازی‌الاضلاع ABCD ، O محل برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ A و B است. اگر فاصلهٔ O از ضلع AB برابر ۲ باشد، طول ارتفاع وارد بر ضلع AD کدام است؟ (نقطهٔ O درون متوازی‌الاضلاع است.)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۳۳- با توجه به شکل کدام نتیجه‌گیری درست است؟



۱) نقاط M و N از خط AB به یک فاصله‌اند.

۲) فاصلهٔ نقطهٔ M از AB کمتر از فاصلهٔ نقطهٔ N از AB است.

۳) فاصلهٔ نقطهٔ N از AB کمتر از فاصلهٔ نقطهٔ M از AB است.

۴) هر سه گزینه می‌تواند درست باشد.

۳۴- مثلث ABC مفروض است. مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند O در صفحهٔ مثلث ABC به طوری که $\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}=\frac{AB}{AC}$ کدام است؟

۱) نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر زاویهٔ A ۲) نیمساز داخلی نظیر زاویهٔ A

۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC ۴) میانهٔ وارد بر ضلع BC

۳۵- مثلث ABC مفروض است. اگر AB = ۴ ، AC = ۵ و BC = ۶ ، چند دایره وجود دارد که مرکز آن‌ها روی ارتفاع نظیر ضلع BC است و از دو نقطهٔ B و C می‌گذرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۳۶- نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ واحد از هم قرار دارند. دنبال نقطه‌ای در صفحه هستیم که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر m و از نقطهٔ B برابر n باشد در چه صورتی این مسئله دارای دو جواب است؟

۱) m = ۳ و n = ۴ ۲) m = ۵ و n = ۳ ۳) m = ۴ و n = ۲ ۴) m = n = ۳

۳۷- قطر AB در دایره‌ای مفروض است. عمودمنصف AB دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. مثلث ABC همواره چگونه مثلثی است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) متساوی‌الاضلاع

۳) قائم‌الزاویهٔ غیر متساوی‌الساقین ۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

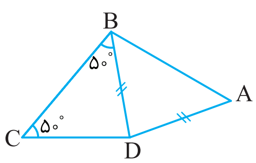
۳۸- پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف آن وجود دارد که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۰ هستند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) ۱

۳۹- پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف این پاره‌خط وجود دارد به طوری که فاصلهٔ آن‌ها از A و B برابر ۵ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۴۰- با توجه به شکل مقابل کدام گزاره درست است؟



۱) BD عمودمنصف AC است. ۲) D روی نیمساز زاویهٔ ABC است.

۳) D روی عمودمنصف AC است. ۴) B روی نیمساز زاویهٔ ADC است.

۴۱- در مثلث ABC به طول ضلع‌های AB = ۸ ، AC = ۶ و BC = ۹ ، اگر فاصلهٔ رأس B از میانهٔ AM برابر k باشد، فاصلهٔ رأس C از این میانه چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}k$ ۲) $\frac{۲}{۳}k$ ۳) k ۴) $\frac{k}{۲}$

۴۲- دو خط متقاطع d و d′ مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصلهٔ آن از هر دو خط d و d′ برابر ۲ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

۴۳- تنها یک مثلث ABC با داده‌های دو ضلع b = ۷ ، c = ۴ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم به طول h_a قابل رسم است. اندازهٔ h_a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴- چند مثلث متمایز مانند ABC با اطلاعات $BC=۴$ و میانهٔ $AM=۳$ و مساحت برابر ۱۲ قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۵- لوزی با طول ضلع ۶ و طول قطر $۲m-۶$ قابل رسم است. چند عدد صحیح برای m وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) نامتناهی

۴۶- برای رسم یک مستطیل، با کدام‌یک از اطلاعات زیر مستطیل منحصر به فرد نیست؟

۱) طول و عرض ۲) طول و قطر ۳) دو قطر ۴) طول و زاویهٔ قطر با آن

۴۷- چند مستطیل می‌توان رسم کرد که طول یک ضلع آن $۴\sqrt{۲}$ و طول قطر آن ۵ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۸- چند متوازی‌الاضلاع وجود دارد که طول قطرهای آن ۴ و ۶ و طول ضلع آن ۵ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

ترسیم‌های هندسی ۳

۴۹- با معلوم بودن زاویهٔ ۴۰° و داشتن خط‌کش و پرگار، کدام‌یک از زاویه‌های زیر قابل رسم نیست؟

۱) ۷۲° ۲) $۱۷/۵^\circ$ ۳) $۲۲/۵^\circ$ ۴) ۶۵°

۵۰- در مثلث ABC، $AB=۵$، $AC=۴$ و $BC=۶$. چند نقطه وجود دارد که از دو ضلع AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله هستند و همچنین از دو رأس B و C هم به یک فاصله هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۵۱- دو نقطهٔ A و B و خط d داده شـده‌اند. می‌خواهیم مثلث متساوی‌السـاقینی رسـم کنیم که رأسش روی d و قاعدهٔ آن پاره‌خط AB باشد. تعداد جواب‌های ممکن برای رسم این مثلث کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) یک جواب ۲) دو جواب ۳) هیچ جواب ۴) نامتناهی جواب

۵۲- نقطه‌های A و B در صفحه ثابت هستند و نقطهٔ C طوری در صفحه تغییر می‌کند که $A\hat{B}C=۲B\hat{A}C$. محل برخورد نیمساز زاویهٔ ABC با پاره‌خط AC وقتی نقطهٔ C تغییر می‌کند چه شکلی درست می‌کند؟

۱) ۱ نقطه ۲) ۱ دایره ۳) خطی موازی با AB ۴) خطی عمود بر AB

۵۳- در مثلث ABC اگر $AC=۲AB$ آن‌گاه نیمساز زاویهٔ A با میانهٔ وارد بر ضلع AC چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

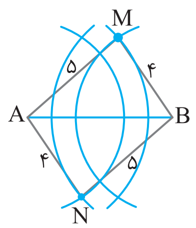
۵۴- مثلث ABC با معلومات $\hat{A}=۴۵^\circ$، $h_b=۳$ و $h_c=۵$ به چند شکل متمایز قابل رسم است؟

۱) نامتناهی ۲) غیر ممکن ۳) یک حالت ۴) دو حالت

۵۵- چند مثلث متساوی‌الساقین با طول اضلاع طبیعی و محیط برابر ۲۰ می‌توان رسم کرد؟

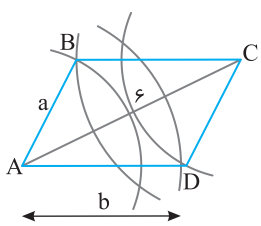
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۶- پاره‌خط $AB=۶$ داده شـده اسـت. به مرکز A و شعاع‌های ۴ و ۵ و بار دیگر به مرکز B و شعاع‌های ۴ و ۵ کمان‌هایی رسـم می‌کنیم. دو نقطه از نقطه‌های برخورد را M و N می‌نامیم. اگر M و N در دو طرف پاره‌خط AB باشند، چهارضلعی $AMBN$ همواره کدام است؟



۱) متوازی‌الاضلاع ۲) ذوزنقه
۳) لوزی ۴) مستطیل

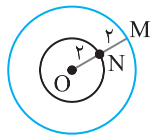
۵۷- برای رسـم یک متوازی‌الاضلاع دلخواه که $AC=۶$ یکی از قطرهای آن باشـد، مطابق شکل از دو سر A و C کمان‌هایی به شـعاع‌های a و b رسـم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های B و D قطع کنند. در این صورت کدام مقدار برای a و b قابل قبول است؟



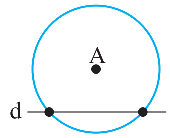
۱) $a=۲$ و $b=۳$ ۲) $a=۴$ و $b=۳$
۳) $a=۳$ و $b=۳$ ۴) $a=۱$ و $b=۷$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

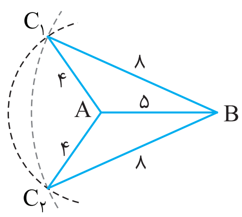
۱- گزینهٔ ۲ شعاع این دایره برابر ۴ است. اگر یکی از شعاع‌های این دایره را رسم کنیم (OM در شکل) و وسط آن را در نظر بگیریم (N در شکل)، معلوم می‌شود فاصلهٔ نقطهٔ N تا O برابر ۲ است. پس وسط تمام شعاع‌ها از نقطهٔ O به فاصلهٔ ثابت ۲ هستند. در نتیجه مجموعهٔ تمام این نقطه‌ها، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع ۲.



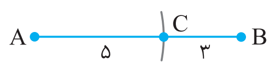
۲- گزینهٔ ۲ نقطه‌هایی که از A به فاصلهٔ ۳ قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ هستند. نقطه‌های برخورد خط d با این دایره جواب هستند. مسلماً خط d می‌تواند این دایره را در دو نقطه قطع کند یا بر آن مماس باشد یا خط d را قطع نکند. پس تعداد جواب‌ها ۲ یا ۱ یا صفر است.



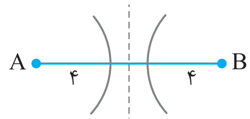
۳- گزینهٔ ۲ ابتدا پاره‌خط AB را به طول ۵ رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ رسم می‌کنیم (کمان اول) و بعد دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۸ رسم می‌کنیم (کمان دوم). محل برخورد این دو کمان، نقطهٔ C است. دقت کنید که در اینجا دو نقطه به‌دست می‌آید.



۴- گزینهٔ ۱ چون $۳+۵=۸$، پس $AB=AC+BC$. در نتیجه نقطهٔ C روی پاره‌خط AB است و برای پیدا کردن آن کافی است به مرکز A و شعاع ۵ دایره‌ای رسم کنیم. محل برخورد این دایره با پاره‌خط AB نقطهٔ C است. توجه کنید که می‌توانستیم به مرکز B و شعاع ۳ دایره‌ای رسم کنیم و محل برخورد آن با پاره‌خط AB را C بنامیم. در هر صورت، با رسم یک کمان، می‌توان نقطهٔ C را به‌دست آورد.



۵- گزینهٔ ۱ پاره‌خط AB به طول ۱۰ را در نظر می‌گیریم. چون $\frac{۱۰}{۲}=۵>۴$، پس چنین نقطه‌ای وجود ندارد، زیرا اگر به مرکزهای A و B و شعاع ۴ کمان‌هایی بزنیم، این کمان‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



۶- گزینهٔ ۴ برای وجود داشتن نقطهٔ C باید $AB<AC+BC$. با توجه به عددهای داده شده در این مسئله، چون $۳+۵<۱۰$، پس $AB>AC+BC$. یعنی چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۷- گزینهٔ ۲ باید هر کدام از عددهای داده شده از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد:

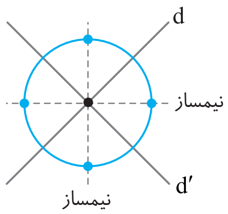
$$x+۵<۲x+۴x-۴ \Rightarrow \frac{۹}{۵}<x$$

$$۲x<x+۵+۴x-۴ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}<x$$

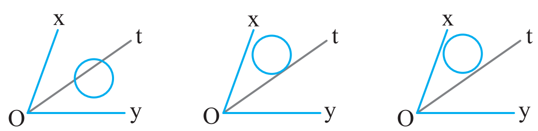
$$۴x-۴<۲x+x+۵ \Rightarrow x<۹$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده، یعنی $\frac{۹}{۵}<x<۹$، محدودهٔ x است.

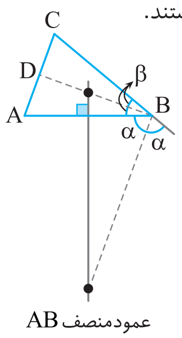
۸- گزینهٔ ۳ نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع d و d′ به یک فاصله هستند روی نیمسازهای زاویه‌های ایجاد شده بین این دو خط متقاطع هستند. این نیمسازها دایرهٔ مذکور را دقیقاً در چهار نقطه قطع می‌کنند. پس مسئله چهار جواب دارد.



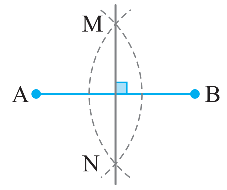
۹- گزینهٔ ۴ نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم. هر نقطه روی این نیمساز از دو ضلع زاویهٔ xOy به یک فاصله است. نقطه‌های برخورد این نیمساز با دایرهٔ مفروض جواب این تست است. نیمساز Ot می‌تواند این دایره را در دو نقطه قطع کند یا بر آن مماس باشد یا آن را قطع نکند.



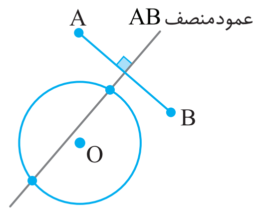
۱۰- گزینهٔ ۳ نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف AB قرار دارند. همچنین نقطه‌هایی که از دو ضلع AB و BC و یا امتداد آن‌ها به یک فاصله‌اند روی نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ B واقع‌اند. محل برخورد عمودمنصف AB و این نیمسازها، همواره دو نقطه است که جواب‌های این تست هستند.



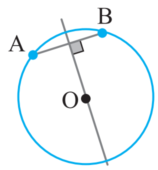
۱۱- گزینهٔ ۱ بـرای رسـم عمودمنصف پارهخـط AB، همان‌طور که در متـن درس دیدیم، به مرکزهای A و B و شـعاع بزرگ‌تـر از نصف AB دو کمان رسم می‌کنیم. خط گذرنده از محل برخورد این دو کمان عمودمنصف AB است.



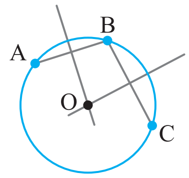
۱۲- گزینهٔ ۴ عمودمنصـف AB را رسـم می‌کنیـم. نقطه‌های برخورد ایـن عمودمنصف با دایره جواب این تسـت اسـت. عمودمنصف AB می‌تواند دایره را در دو نقطه قطع کند یا بر دایره مماس باشـد یا دایره را قطع نکند. پس تعداد نقطه‌های جواب ۲ یا ۱ یا صفر است.



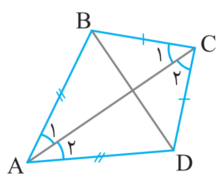
۱۳- گزینهٔ ۱ AB وتـر دایـره اسـت. بنابرایـن A و B روی محیـط دایره‌اند. پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره یعنی OA و OB یکسان است. بنابراین O روی عمودمنصف AB واقع شده است. یعنی فاصلهٔ O تا عمودمنصف AB صفر است.



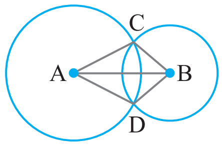
۱۴- گزینهٔ ۲ مرکز دایره از نقطه‌های A، B و C به یک فاصله اسـت. بنابراین مرکز دایره روی عمودمنصف‌های BA و BC قرار دارد.



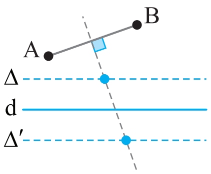
۱۵- گزینهٔ ۳ با رسم قطر AC نتیجه می‌شود دو مثلث ABC و ADC به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند. پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$. بنابراین AC نیمساز زاویهٔ A و C است. پس گزارهٔ (الف) درست است. از طرف دیگر نقطه‌هـای A و C از دو سـر پاره‌خـط BD بـه یـک فاصله هسـتند. پس AC عمودمنصف BD اسـت. بنابراین گزارهٔ (پ) نیز درست است. ولی گزاره‌های (ب) و (ت) درست نیستند.



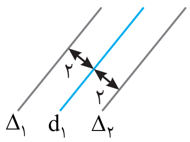
۱۶- گزینهٔ ۴ چـون AC=AD و BC=BD پـس خـط AB عمودمنصف پاره‌خط CD است. بنابراین هر نقطه روی پاره‌خط AB از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله است.



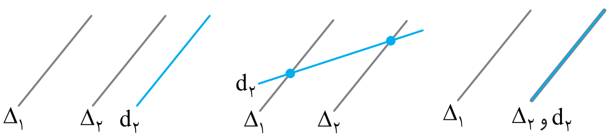
۱۷- گزینهٔ ۱ نقطه‌هایـی کـه از خـط d به فاصلـهٔ L هسـتند، دو خط موازی d هستند. از طرف دیگر، نقطه‌هایی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هسـتند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارنـد. پس نقطه‌های مورد نظر، نقطه‌های برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با دو خط موازی d هسـتند (شکل را ببینیـد). بنابرایـن تعـداد نقطه‌هـای مـورد نظـر یـا صفـر اسـت (زمانی که عمودمنصف پاره‌خط AB با Δ و Δ' موازی باشـد) یا نامتناهی اسـت (زمانی کـه عمودمنصـف AB بـر Δ یـا Δ' منطبق باشـد) یـا ۲ اسـت (زمانی که عمودمنصف با Δ و Δ' متقاطع باشد).



۱۸- گزینهٔ ۲ مجموعهٔ نقطه‌هایی که از d_1 به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی d_1 و به فاصلهٔ ۲ از آن هستند (خط‌های Δ_1 و Δ_2 را در شکل ببینید). بنابراین باید بررسی کنیم خط d_2 با این دو خط چند نقطهٔ مشترک دارد.

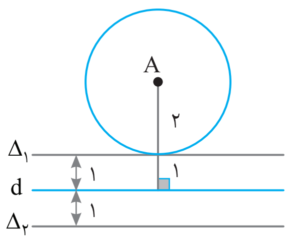


حالت‌های زیر پیش می‌آید:



نامتناهی جواب | دو جواب | بدون جواب

۱۹- گزینهٔ ۲ مجموعـهٔ نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ ۱ هسـتند دو خـط مـوازی بـا d و به فاصلـهٔ ۱ از آن اسـت (دو خط Δ_1 و Δ_2 را در شـکل ببینیـد). از طـرف دیگـر، مجموعـهٔ نقطه‌هایی کـه از A به فاصلهٔ ۲ هسـتند، دایره‌ای اسـت به مرکز A و شـعاع ۲ (دایرهٔ رسم شده در شکل را ببینید). چون فاصلـهٔ A از خـط d برابر ۳ و فاصلهٔ A از خط Δ_1 برابر ۱ اسـت، پس دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۲ بر Δ_1 مماس است. در نتیجه فقط ۱ نقطه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۲ و از خط d به فاصلهٔ ۱ است.



۲۰- گزینهٔ ۴ با داشتن سه زاویهٔ مثلث، نامتناهی مثلث قابل رسم است. به عنوان مثال اگر هر سه زاویهٔ مثلث °۶۰ باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است و واضح است که نامتناهی مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع‌های متفاوت داریم.