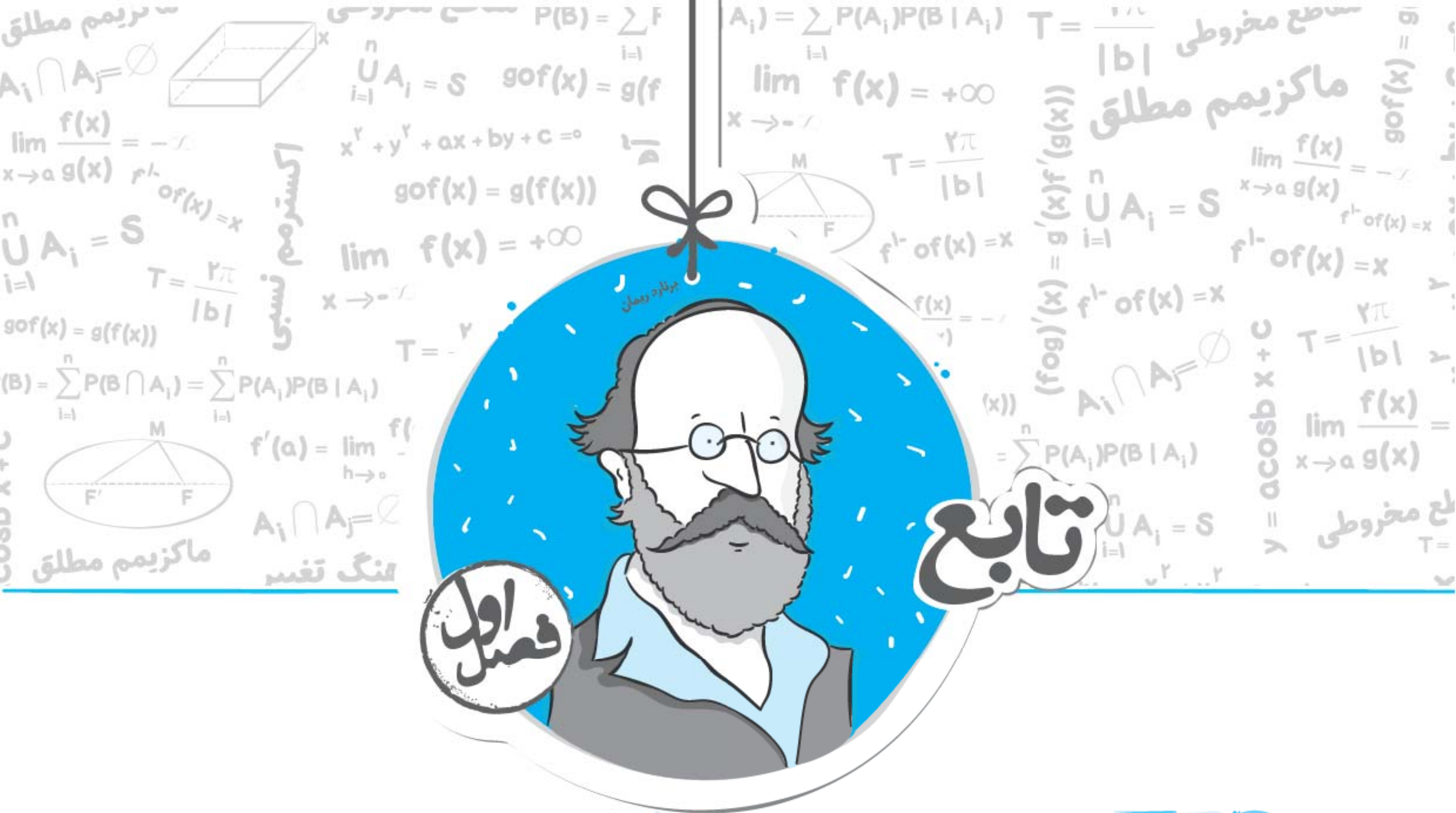
فهرست



۱ توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

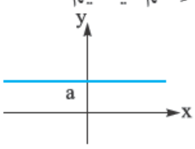
در دو سال گذشته با تابع آشنا شدیم. دیدیم تابع را می‌توانیم به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار پیکانی، نمودار مختصاتی یا یک ضابطهٔ جبری نمایش دهیم.

با دامنهٔ تابع یعنی مجموعهٔ مقادیری از x که تابع به ازای آن‌ها تعریف می‌شود و با برد تابع یعنی مجموعهٔ مقادیر تابع یا y، آشنا شدیم. یکی از انواع توابعی که در سال‌های دهم و یازدهم شناختیم **توابع چندجمله‌ای** بود.

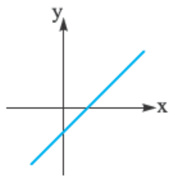
می‌دانیم هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ که در آن $a_n,\dots,a_۲,a_۱,a_۰$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یک تابع چندجمله‌ای است. *(ساده‌ترش این‌که توان‌های x باید اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند)* مثلاً $f(x)=۵$ و $g(x)=۳x$ و $h(x)=-۲x+۳$ و $k(x)=x^۲+۲x-۱۰$ همه یک تابع چندجمله‌ای‌اند. به بزرگ‌ترین توان n در تابع می‌گوییم درجهٔ چندجمله‌ای. در مثال‌های بالا f از درجهٔ صفر، g و h از درجهٔ ۱ و k از درجهٔ ۲ است.

دامنهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است و اگر n فرد باشد، برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است. چند مثال از تابع چندجمله‌ای که قبلاً هم دیده‌ایم:

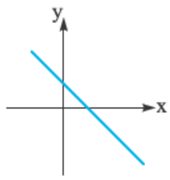
۱ تابع $f(x)=a$ (از درجهٔ صفر) یک تابع ثابت است.
که حتماً یادمان هست که بردش برابر است با $R_f=\{a\}$.



۲ تابع $f(x)=ax+b$ (از درجهٔ ۱) یک تابع خطی است که بردش برابر است با $R_f=\mathbb{R}$.

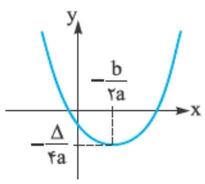


$a>۰$
$f(x)=ax+b$



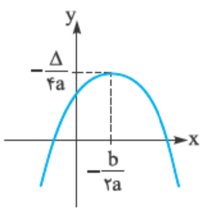
$a<۰$
$f(x)=ax+b$

۳ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ (از درجهٔ ۲) یک سهمی است.
که بردش برابر است با:



$a>۰$

$R_f=[\frac{-\Delta}{۴a},+\infty)$



$a<۰$

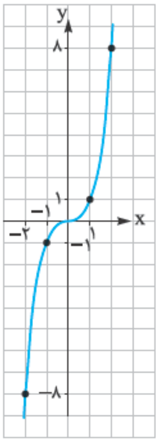
$R_f=(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$

این‌ها تابع‌هایی بودند که در سال دهم و یازدهم با آن‌ها آشنا شدیم. امسال با تابع $f(x)=x^3$ آشنا می‌شویم.

نمودار تابع $f(x)=x^3$ را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۸	−۱	۰	۱	۸

نمودار تابع به صورت روبه‌رو است:



حالا با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$ و انتقال می‌توانیم نمودار تابع‌هایی به صورت $f(x)=a(x+b)^3$ را رسم کنیم.

مثال و پاسخ

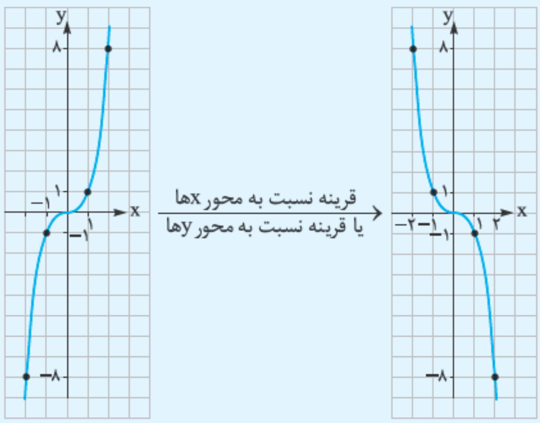
مثال **نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$ رسم کنید.**

الف) $g(x)=-x^3$ ب) $g(x)=x^3-1$ پ) $g(x)=(x-1)^3$

ت) $g(x)=(x+2)^3$ ث) $g(x)=-(x+1)^3+2$ ج) $g(x)=(-x+2)^3$

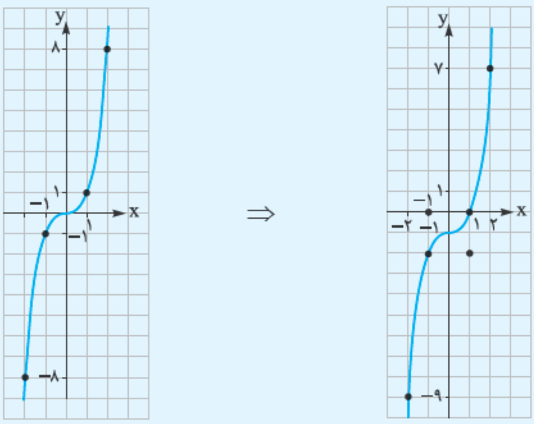
پاسخ اول نمودار تابع $f(x)=x^3$ را می‌کشیم و بعد هر کدام از نمودارها را با انتقال مناسب از روی نمودار $f(x)=x^3$ رسم می‌کنیم.

الف تابع $g(x)=-x^3$ برابر است با $y=-f(x)$ یا $y=f(-x)$ و می‌دانیم برای اولی باید نمودار تابع $f(x)=x^3$ را نسبت به محور xها و برای دومی آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم که در هر دو حالت نتیجه یکی است:

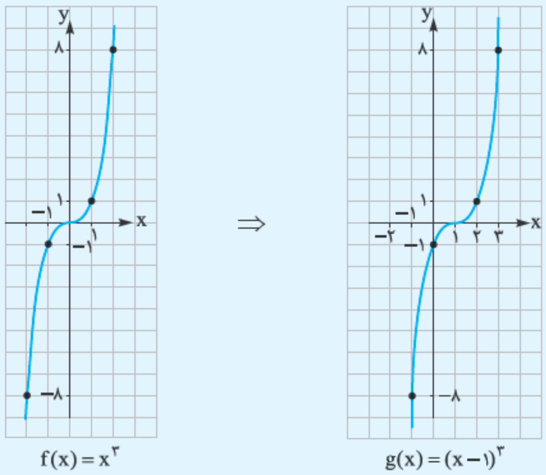


$f(x)=x^3$ $g(x)=-x^3$

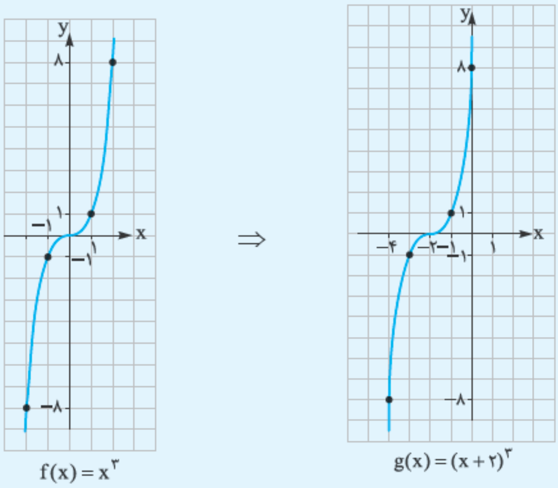
پ تابع $g(x)=x^3-1$ برابر است با $y=f(x)-1$ و می‌دانیم برای رسم نمودار $f(x)-1$، باید نمودار تابع f را یک واحد در راستای محور yها به پایین انتقال دهیم:


$f(x)=x^3$ $g(x)=x^3-1$

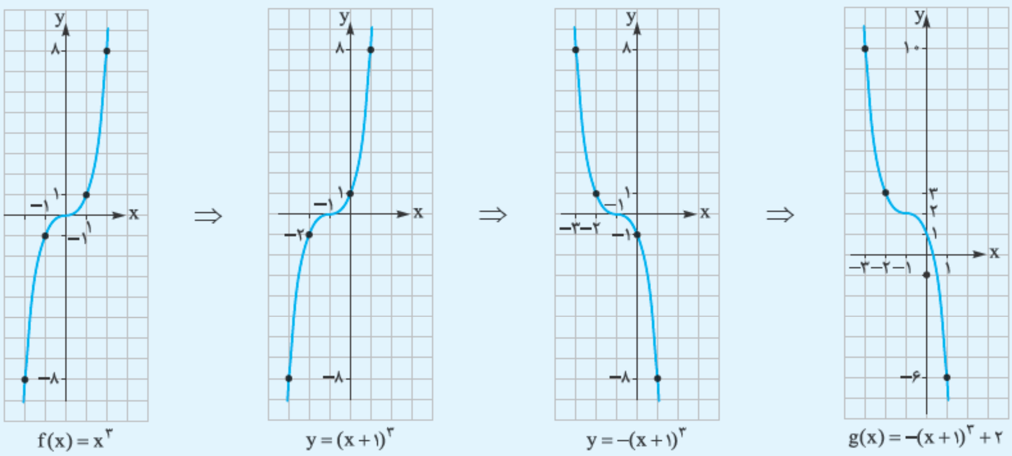
پ) تابع $g(x)=(x-1)^3$ برابر است با $y=f(x-1)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x-1)$ باید نمودار f را ۱ واحد در راستای محور xها به سمت راست انتقال دهیم:



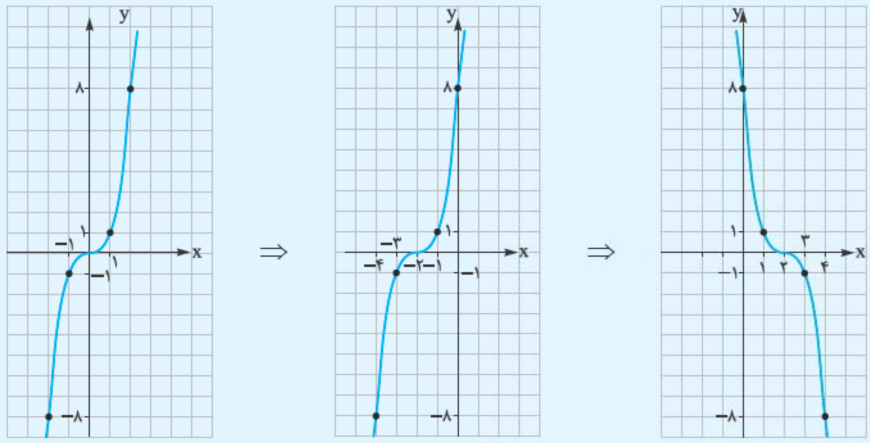
ت) تابع $g(x)=(x+2)^3$ برابر است با $y=f(x+2)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x+2)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور xها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم:



ث) تابع $g(x)=-(x+1)^3+2$ برابر است با $y=-f(x+1)+2$. پس باید نمودار $f(x)$ را اول ۱ واحد در راستای محور xها به سمت چپ انتقال دهیم (یعنی $f(x+1)$) و بعد آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم (یعنی $-(x+1)^3$) و بعد در راستای محور yها، ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم (یعنی $-(x+1)^3+2$):

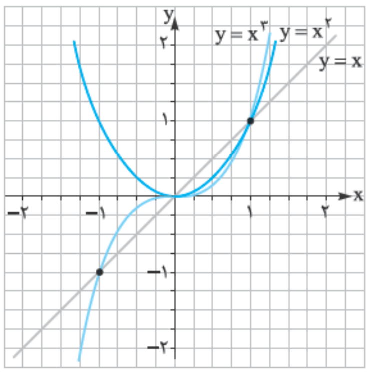


ج) تابع $g(x)=(-x+2)^3$ برابر است با $y=f(-x+2)$. پس باید اول نمودار تابع $f(x+2)$ را از روی نمودار $f(x)$ رسم کنیم، یعنی نمودار f را در راستای محور xها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم و بعد نمودار $f(-x+2)$ را رسم کنیم، یعنی قرینهٔ نمودار $f(x+2)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم:



$f(x)=x^3$ $\Rightarrow$ $g(x)=(x+2)^3$ $\Rightarrow$ $g(x)=(-x+2)^3$

بررسی نمودار تابع‌های $y=x$، $y=x^2$ و $y=x^3$



۱) می‌دانیم برای $x>1$ هر چه مقدار n بیشتر شود، حاصل x^n بزرگ‌تر می‌شود، پس برای xهای بزرگ‌تر از ۱ داریم: $x^3>x^2>x$.

۲) در $x=1$ مقدار x، x^2 و x^3 مساوی ۱ است، پس هر سه نمودار از نقطهٔ $(1,1)$ می‌گذرند.

۳) برای $0<x<1$ هر چه مقدار n بیشتر شود حاصل x^n کوچک‌تر می‌شود، پس برای xهای بین صفر و ۱ داریم: $x^3<x^2<x$.

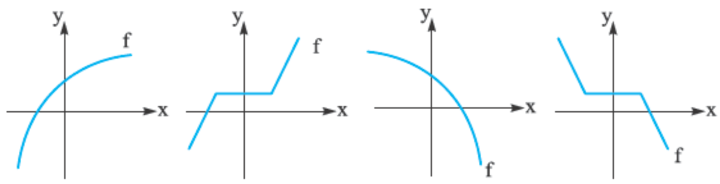
۴) در $x=0$ مقدار x، x^2 و x^3 مساوی صفر است، پس هر سه نمودار از نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرند.

۵) در $x=-1$، مقدار x و x^3 مساوی -1 است ولی مقدار x^2 مساوی ۱ است.

حالا با توجه به نکات بالا نمودار هر سه تابع را رسم می‌کنیم. ویژگی‌های بالا را روی نمودار بررسی کنید.

توابع صعودی و نزولی

به نمودارهای روبه‌رو نگاه کنید.



(الف) (ب) (پ) (ت)

در نمودار (الف) **با زیادشدن x، مقدار y هم زیاد می‌شود. اگر تابعی این‌چنین باشد، می‌گوییم اکیداً صعودی است** *(اکیداً یعنی همواره و همیشه)*. در این تابع داریم: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

در نمودار (ب) **با زیادشدن x، مقدار y یا زیاد می‌شود و یا ثابت می‌ماند. این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست** (به علت این‌که بعضی‌وقت‌ها با زیادشدن x، مقدار y ثابت می‌ماند). در این تابع داریم:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$

در نمودار (پ) **با زیادشدن x، مقدار y هم کم می‌شود. به این تابع می‌گوییم اکیداً نزولی.** در این تابع داریم:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

در نمودار (ت) **با زیادشدن x، مقدار y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند. این تابع نزولی است اما اکیداً نزولی نیست.** در این تابع داریم:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$

اگر بخواهیم آن‌چه را که تا این‌جا دیدیم خلاصه کنیم می‌توانیم بگوییم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \bigcirc f(x_2)$$

اکیداً: صعودی $<$ ، نزولی $>$

غیراکید: صعودی $\le$ ، نزولی $\ge$

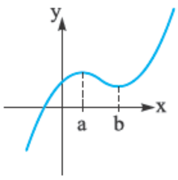
ساده‌ترش این‌که:

در تابع صعودی و اکیداً صعودی جهت تغییرات x و $f(x)$ یکسان است.

در تابع نزولی و اکیداً نزولی جهت تغییرات x و $f(x)$ مخالف یکدیگر است.

در تعریف تابع اکیداً صعودی (یا نزولی) مساوی نداریم، اما در تعریف تابع صعودی (یا نزولی) مساوی داریم.

حالا بیایید به نمودار تابع روبه‌رو نگاه کنیم:



تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ صعودی اکید، در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید و در بازهٔ $[b,+\infty)$ صعودی اکید است، اما در کل تابع نه صعودی است و نه نزولی.

اگر تابعی صعودی باشد (یا نزولی باشد) می‌گوییم یکنوا است. *(یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است)*

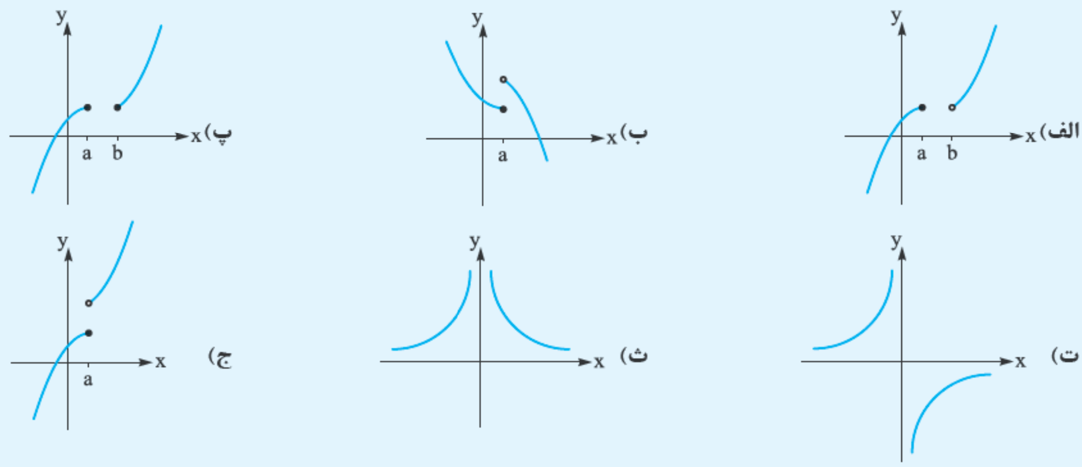
اگر تابعی اکیداً صعودی باشد (یا اکیداً نزولی باشد) می‌گوییم اکیداً یکنوا است.

اگر تابعی نه صعودی باشد و نه نزولی (یعنی در بعضی بازه‌ها صعودی و در بعضی بازه‌ها نزولی باشد) می‌گوییم غیریکنوا یا **نایکنوا** است.

اگر تابعی هم صعودی باشد و هم نزولی، یعنی تابع ثابت است. *(می‌توانستیم بگوییم تابع پی‌نوا است!)*

مثال و پاسخ

مثال **تعیین کنید هر یک از تابع‌های زیر اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، صعودی، نزولی یا غیریکنوا است.**



پاسخ در **پ** با زیاد شدن x مقدار y زیاد می‌شود پس تابع اکیداً صعودی است. اگر **الف** را با **پ** مقایسه کنیم، **الف** هم مثل **پ** است فقط با این تفاوت که عرض دو نقطه به طول‌های a و b یکسان‌اند، پس **الف** صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست (فقط به خاطر همین دو نقطه که عرض برابر دارند). در **ب** هر کدام از شاخه‌ها اکیداً نزولی است اما تابع در کل غیریکنوا است. چون اگر دو نقطهٔ نزدیک به a، یکی در سمت چپ و یکی در سمت راست آن انتخاب کنیم، با افزایش x مقدار y هم زیاد می‌شود، پس تابع نه صعودی است و نه نزولی. **ج** هم مثل **پ** است. اگرچه هر کدام از شاخه‌های منحنی صعودی‌اند، اما اگر دو نقطه یکی با طول منفی و دیگری با طول مثبت انتخاب کنیم عرض نقطه کم می‌شود. در **ث** چون یکی از شاخه‌ها صعودی و دیگری نزولی است پس تابع غیریکنوا است. **ت** یک تابع اکیداً صعودی است، چون مقدار y همواره در حرکت از چپ به راست زیاد می‌شود.

نکته چند نکته در مورد یکنوایی تابع:

۱ هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یکنوا هم هست، اما عکس این موضوع درست نیست.

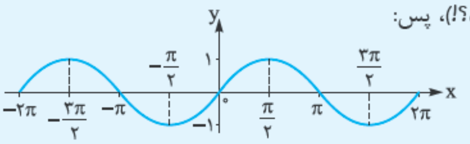
۲ اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد حتماً یک‌به‌یک نیز هست اما باز هم عکس این موضوع درست نیست، یعنی ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد ولی یکنوا نباشد. (مثل شکل (۴) مثال قبل)

۳ اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد حتماً اکیداً یکنوا نیست.

مثال و پاسخ

مثال نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید و تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است.

پاسخ رسم نمودار تابع $y=\sin x$ را از سال قبل یاد گرفتیم. *(یادتان هست؟!)*، پس:



حالا جهت تغییرات تابع را در هر کدام از بازه‌های به طول $\frac{\pi}{۲}$ (یعنی ربع دایرهٔ مثلثاتی) در یک جدول مشخص می‌کنیم:

x	-۲π	$\frac{-۳\pi}{۲}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$		صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

سؤال‌های امتحانی

۱- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=(x+۱)^۳-۱$ ب) $y=(۲x-۱)^۳$ پ) $y=(-x+۲)^۳+۱$ ت) $y=(-\frac{x}{۲}+۱)^۳$

۲- نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است و آیا تابع در کل یکنوا (یا اکیداً یکنوا) هست یا نه؟ دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\le ۰\\ x-۱ & x>۰\end{cases}$ ب) $g(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\le ۰\\ ۲ & ۰<x\le ۱\\ x+۲ & ۱<x\end{cases}$ پ) $h(x)=x^۲-۲x+۲$ ت) $k(x)=\sqrt{x-۲}+۱$

۳- نمودار تابع‌های $f(x)=x|x|$ و $g(x)=x^۲|x|$ را رسم کنید و بگویید هر کدام در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی‌اند.

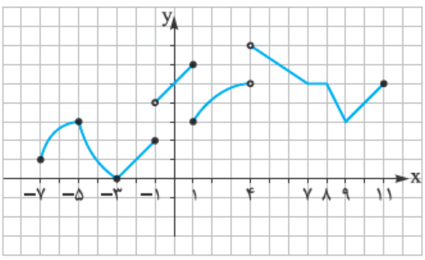
۴- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید و بگویید چگونه‌اند؟ صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا غیریکنوا؟

الف) $f(x)=x+|x|$ ب) $g(x)=x-|x|$ پ) $h(x)=x-[x]$ ت) $k(x)=x+[x]$

۵- نمودار تابع‌های $y=۲^x+۱$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و بگویید صعودی‌اند یا نزولی؟ سپس با توجه به آن‌چه در سال یازدهم در مورد نمودار تابع $y=a^x$ یاد گرفته‌اید، بگویید تابع $y=a^x$ با چه شرطی اکیداً صعودی و با چه شرطی اکیداً نزولی است.

۶- نمودار تابع‌های $y=\log_۲ x$ و $y=\log_{\frac{۱}{۳}} x$ را رسم کنید و بگویید صعودی‌اند یا نزولی؟ سپس با توجه به آن‌چه در سال یازدهم در مورد نمودار تابع $y=\log_a x$ یاد گرفته‌اید، بگویید تابع $y=\log_a x$ با چه شرطی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

۷- تعیین کنید تابع با نمودار مقابل در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است؟ (بزرگ‌ترین بازه‌هایی را که ممکن است انتخاب کنید)



۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۲x$، دامنهٔ تابع را چگونه تعریف کنیم که تابع در دامنه‌اش اکیداً صعودی باشد.

۹- بگویید تابع $f(x)=-x^۲+۴x-۳$ در هر کدام از بازه‌های زیر چگونه است؟ اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، غیریکنوا؟

الف) $[۰,+\infty)$ ب) $(-\infty,۰]$ پ) $[۱,۳]$

ت) $[۲,۴]$ ث) $[۰,۲]$ ج) $[-۱,۱]$

۲ ترکیب توابع

پارسال با اعمال جبری بین تابع‌ها آشنا شدیم. مثلاً اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشتیم می‌توانستیم دو تابع را *(مثل دو عدد)* با هم جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کنیم:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad \text{یا} \quad (f.g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \text{یا} \quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حالا می‌خواهیم دربارهٔ عملی حرف بزنیم به اسم ترکیب توابع. *(این‌جا کلمهٔ ترکیب هیچ ربطی به تجزیه و ترکیب و ... و عربی و فارسی و شیمی و ... ندارد)*

تعریف: اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشته باشیم و به جای x یکی از تابع‌ها، ضابطه یا مقدار تابع دیگر را قرار دهیم، می‌گوییم دو تابع را ترکیب کرده‌ایم:

$g(x)$ را می‌گذاریم به جای x

$$f(x) \quad \text{و} \quad g(x) \Rightarrow f(g(x)) = (fog)(x)$$

$f(x)$ را می‌گذاریم به جای x

$$f(x) \quad \text{و} \quad g(x) \Rightarrow g(f(x)) = (gof)(x)$$

ترکیب دو تابع f و g را با $(fog)(x)$ یا $(gof)(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال و پاسخ

مثال اگر $f = \{(۱,۲),(۲,-۱),(۳,۱),(۴,۲)\}$ و $g = \{(۱,-۲),(۲,۳),(۵,۲),(-۱,۳)\}$ باشد، fog و gof را پیدا کنید.

پاسخ برای پیداکردن fog اول می‌رویم سراغ تابع g، می‌بینیم که در تابع g به هر کدام از مقدارهای x، چه مقداری نسبت داده می‌شود و بعد با توجه به تابع f، مقدار تابع f را به ازای yهای تابع g پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{ccccc} & g & & f & \\ ۱ & \rightarrow & -۲ & \rightarrow & \text{تعریف نشده} \\ ۲ & \rightarrow & ۳ & \rightarrow & ۱ \\ ۵ & \rightarrow & ۲ & \rightarrow & -۱ \\ -۱ & \rightarrow & ۳ & \rightarrow & ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow (fog) = \{(۲,۱),(۵,-۱),(-۱,۱)\}$$

حالا gof را هم پیدا می‌کنیم. منتها این بار، اول می‌رویم سراغ f و بعد g:

$$\left.\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ ۱ & \rightarrow & ۲ & \rightarrow & ۳ \\ ۲ & \rightarrow & -۱ & \rightarrow & ۳ \\ ۳ & \rightarrow & ۱ & \rightarrow & -۲ \\ ۴ & \rightarrow & ۲ & \rightarrow & ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow (gof) = \{(۱,۳),(۲,۳),(۳,-۲),(۴,۳)\}$$

نکته همان‌طورکه در مثال بالا دیدیم، ممکن است fog یا gof به ازای بعضی از xها تعریف نشوند.

پیداکردن ضابطه و دامنهٔ ترکیب دو تابع

اگر ضابطهٔ جبری دو تابع f و g را داشته باشیم، برای پیداکردن ضابطهٔ ترکیب دو تابع در یکی از تابع‌ها *(تابع بیرونی)*، به جای x ، ضابطهٔ تابع دیگر *(تابع درونی)* را قرار می‌دهیم:

$$(\overset{\substack{\text{تابع}\\\text{بیرونی}\\\downarrow}}{g}\ o\ \overset{\substack{\text{تابع}\\\text{درونی}\\\downarrow}}{f})(x) = g(f(x)) \qquad (\overset{\substack{\text{تابع}\\\text{بیرونی}\\\downarrow}}{f}\ o\ \overset{\substack{\text{تابع}\\\text{درونی}\\\downarrow}}{g})(x) = f(g(x))$$

یا به عبارت ساده‌تر، در تابع بیرونی به جای x، ضابطهٔ تابع درونی را جایگزین می‌کنیم.

مثال و پاسخ

مثال اگر $f(x) = x^۲ + ۲$ و $g(x) = ۲x - ۱$ باشد. ضابطهٔ fog و gof را پیدا کنید.

پاسخ طبق چیزی که در بالا دیدیم، داریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۲x-۱) = (۲x-۱)^۲ + ۲ = ۴x^۲ - ۴x + ۱ + ۲ = ۴x^۲ - ۴x + ۳$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + ۲) = ۲(x^۲ + ۲) - ۱ = ۲x^۲ + ۳$$

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم:

نکته **در حالت کلی fog و gof با هم برابر نیستند** *(یعنی ممکن است بعضی وقت‌ها برابر شوند اما معمولاً برابر نیستند)*.

مثال و پاسخ

مثال **اگر $f(x)=۲x-۱$ و $(fog)(x)=۲x^۲-۴x+۱$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را پیدا کنید.**

پاسخ می‌دانیم $(fog)(x)=f(g(x))$؛ پس با توجه به این‌که $f(x)=۲x-۱$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases}(fog)(x)=۲g(x)-۱\\(fog)(x)=۲x^۲-۴x+۱\end{cases}\Rightarrow ۲g(x)-۱=۲x^۲-۴x+۱\Rightarrow ۲g(x)=۲x^۲-۴x+۲$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{۲(x^۲-۲x+۱)}{۲}=(x-۱)^۲$$

پس $g(x)=(x-۱)^۲$ است.

دامنهٔ ترکیب دو تابع

دیدیم که برای پیداکردن $(fog)(x)$ (یا همان $f(g(x))$)، اول x را می‌گذاریم توی تابع g (تابع درونی) و بعد حاصل $g(x)$ را می‌گذاریم توی تابع f، پس برای این‌که $f(g(x))$ تعریف شده باشد باید:

$$x \xrightarrow{\text{تعریف بشود}} \text{g(x)} \xrightarrow{\text{تعریف بشود}} f(x)$$

پس: $x\in D_g$ و پس: $g(x)\in D_f$

بنابراین دامنهٔ $(fog)(x)$ برابر است با:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$

یا اگر بخواهیم دامنهٔ ترکیب دو تابع را به صورت فارسی بنویسیم، می‌شود:

{دامنهٔ تابع بیرونی ∈ (تابع درونی)|دامنهٔ تابع درونی ∈ x} = دامنهٔ ترکیب دو تابع

پس در مورد fog و gof داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}\qquad D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$

بنابراین برای پیداکردن دامنهٔ ترکیب دو تابع باید:

الف **دامنهٔ هر کدام از تابع‌ها را پیدا کنیم.**

ب **تعریف دامنهٔ تابع مرکب را بنویسیم و نتیجهٔ هر کدام از شرط‌های تعریف را پیدا کنیم.**

نکته **دامنهٔ تابع مرکب را باید با استفاده از تعریف بالا حساب کنیم، نه از روی ضابطهٔ آن.**
اگر دامنهٔ تعریف را با استفاده از ضابطهٔ تابع مرکب پیدا کنیم، ممکن است جواب اشتباه به دست آید.

مثال و پاسخ

مثال **اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x-۵}$ باشند، دامنهٔ تابع‌های fog و gof را پیدا کنید.**

پاسخ **الف** دامنهٔ هر کدام از تابع‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt{x-۵}:D_g=[۵,+\infty)$$

$$f(x)=۲x-۱:D_f=\mathbb{R}$$

ب می‌رویم سراغ تعریف دامنهٔ fog و gof:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in[۵,+\infty)\,|\,\sqrt{x-۵}\in\mathbb{R}\}$$

حالا $x\in[۵,+\infty)$ یعنی $x\geq ۵$ و $\sqrt{x-۵}\in\mathbb{R}$ یعنی حاصل $\sqrt{x-۵}$ یک عدد حقیقی باشد که می‌دانیم حتماً هست، پس دامنهٔ تابع fog می‌شود همان $x\geq ۵$ یا $[۵,+\infty)$:

$$D_{fog}=[۵,+\infty)$$

در مورد دامنهٔ gof هم داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(۲x-۱)\in[۵,+\infty)\}$$

$$=\{\mathbb{R}\,|\,۲x-۱\geq ۵\}=\{\mathbb{R}\,|\,x\geq ۳\}=[۳,+\infty)$$

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم، **در حالت کلی دامنهٔ fog و gof با هم برابر نیست.** *(ولی ممکن است گاهی برابر شود.)*

پیداکردن مقدار عددی fog یا gof

برای پیداکردن مقدار عددی ترکیب دو تابع، مثلاً مقدار عددی تابع $(fog)(x)$ در نقطهٔ $x=a$، کافی است اول مقدار x (یعنی a) را در تابع درونی قرار دهیم و سپس حاصل تابع درونی را در تابع بیرونی جایگزین کنیم؛ یعنی لازم نیست حتماً ضابطهٔ fog را پیدا کنیم.

مثال و پاسخ

مثال اگر $f(x)=\dfrac{3x^2+5}{\sqrt{x}+3}$ و $g(x)=\dfrac{7x+1}{x^2+1}$ باشد، مقدار $(gof)(1)$ را پیدا کنید.

پاسخ همان‌طور که گفتیم اول $f(1)$ و بعد $g(f(1))$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(1)=\frac{3(1)^2+5}{\sqrt{1}+3}=\frac{8}{4}=2$$

$$g(f(1))=g(2)=\frac{7(2)+1}{(2)^2+1}=\frac{15}{5}=3$$

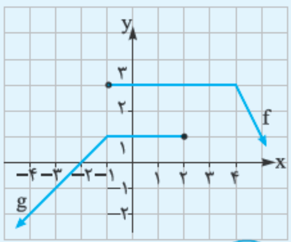
نکته اگر نمودار دو تابع f و g را داشته باشیم، می‌توانیم مقدار fog یا gof را به ازای یک عدد مشخص از روی نقاط نمودار پیدا کنیم.

مثال و پاسخ

مثال نمودار روبه‌رو توابع f و g را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را (در صورت وجود) پیدا کنید.

$(fog)(-2)$, $(fog)(-4)$

$(gof)(4)$, $(gof)(0)$



پاسخ مقدار هر کدام را از روی شکل پیدا می‌کنیم. فقط قبل از هر چیز باید حواسمان باشد که f به ازای xهای $x\geq -1$ و g به ازای xهای $x\leq 2$ تعریف‌شده است.

$(fog)(-4)=f(g(-4))=f(-2)=$ تعریف‌نشده

$(fog)(-2)=f(g(-2))=f(0)=3$

$(gof)(0)=g(f(0))=g(3)=$ تعریف‌نشده

$(gof)(4)=g(f(4))=g(2)=$ تعریف‌نشده

معادله‌های شامل fog یا gof

قبلاً دیدیم که چگونه ضابطهٔ fog یا gof را پیدا کنیم. حالا اگر $(fog)(x)=a$ (که در آن a یک عدد حقیقی است) باشد، با یک معادله سروکار داریم. برای حل معادلهٔ $f(g(x))=a$ می‌توانیم یا اول ضابطهٔ $f(g(x))$ را پیدا کنیم و بعد معادلهٔ به دست آمده را حل کنیم *(که معمولاً راه فوقی نیست چون وقت‌گیر و دشوار است)* و یا معادله را به صورت زیر حل کنیم:

برای حل معادلهٔ $f(g(x))=a$:

الف معادلهٔ $f(x)=a$ را حل و جواب‌هایش را پیدا می‌کنیم.

ب عبارت $g(x)$ را برابر جواب‌های معادلهٔ $f(x)=a$ قرار می‌دهیم و معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم.

بیایید با یک مثال این روش را ببینیم.

مثال و پاسخ

مثال اگر $f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=x^2-1$ باشند، جواب‌های معادلهٔ $(gof)(x)=8$ را پیدا کنید.

پاسخ همان‌طور که گفتیم چون داریم $g(f(x))=8$ اول جواب‌های معادلهٔ $g(x)=8$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=8\Rightarrow x^2-1=8\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}$$

حالا $f(x)$ را برابر جواب‌های معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}f(x)=3\Rightarrow x^2+2x=3\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow(x-1)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}\\ f(x)=-3\Rightarrow x^2+2x=-3\Rightarrow x^2+2x+3=0\Rightarrow\Delta=2^2-4(1)(3)<0\quad\text{جواب ندارد}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادلهٔ $(gof)(x)=8$ برابرند با $x=1$ و $x=-3$.

نوشتن یک تابع به شکل ترکیب دو تابع

دیدیم که می‌توانیم دو تابع f و g را ترکیب کنیم و تابع fog یا gof را به دست آوریم. حالا می‌خواهیم عکس این عمل را انجام دهیم؛ یعنی یک تابع مشخص را به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تابع $h(x)=(x^2+1)^3$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم. برای این کار یک قسمت مشخص از ضابطهٔ h را به عنوان تابعی مثل $g(x)$ در نظر می‌گیریم و بعد در تابع h، به جای آن می‌گذاریم x و $h(x)$ را به $f(x)$ تبدیل می‌کنیم. در این صورت تابع h برابر است با fog، مثلاً در مورد $h(x)=(x^2+1)^3$ داریم:

$$h(x)=(\underbrace{x^2}_{g(x)=x^2}+1)^3 \Rightarrow f(x)=(x+1)^3 \;\Bigg|\; \Rightarrow \begin{cases} f(x)=(x+1)^3 \\ g(x)=x^2 \\ h(x)=(fog)(x) \end{cases}$$

طور دیگری هم می‌توانستیم این کار را بکنیم:

$$h(x)=(\underbrace{x^2+1}_{g(x)=x^2+1})^3 \Rightarrow f(x)=(x)^3 \;\Bigg|\; \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^3 \\ g(x)=x^2+1 \\ h(x)=(fog)(x) \end{cases}$$

در حالت کلی یک تابع را می‌توانیم به بی‌شمار شکل به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم.

مثال و پاسخ

مثال تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

پاسخ مثل توضیح بالا می‌نویسیم:

$$h(x)=\sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{g(x)=x^2}+1} \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x+1} \;\Bigg|\; \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x+1} \\ g(x)=x^2 \\ h(x)=(fog)(x) \end{cases}$$

یا می‌توانیم بنویسیم:

$$h(x)=\sqrt[3]{\underbrace{x^2+1}_{g(x)=x^2+1}} \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x} \;\Bigg|\; \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x} \\ g(x)=x^2+1 \\ h(x)=(fog)(x) \end{cases}$$

انتقال توابع

در سال دهم و یازدهم طریقهٔ رسم نمودار تابع با استفاده از انتقال را یاد گرفتیم. *احتمالاً یادتان هست اما برای این‌که خیالمان راحت باشد یک مرور سریع می‌کنیم:*

الف) رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$

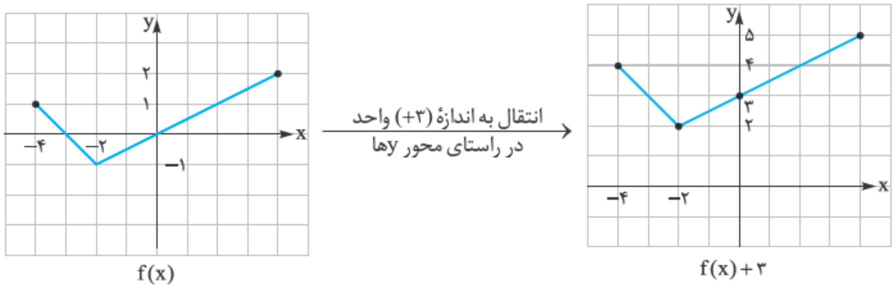
برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازهٔ $(-a)$ واحد در امتداد محور xها انتقال بدهیم ($(-a)$ ریشهٔ عبارت $x+a$ است).

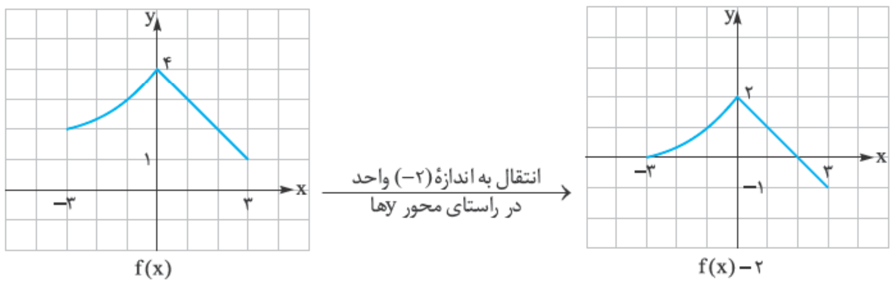
f(x) — f(x−۲)

f(x) — f(x+۳)

ب) رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها انتقال دهیم. مثلاً:





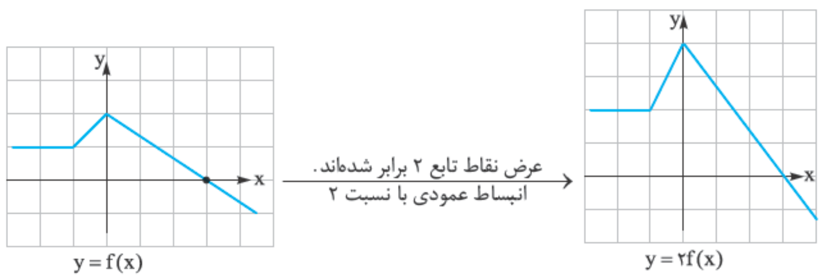
حالا برویم سراغ بقیهٔ درس که مربوط است به امسال:

پ) رسم نمودار تابع $y=kf(x)$

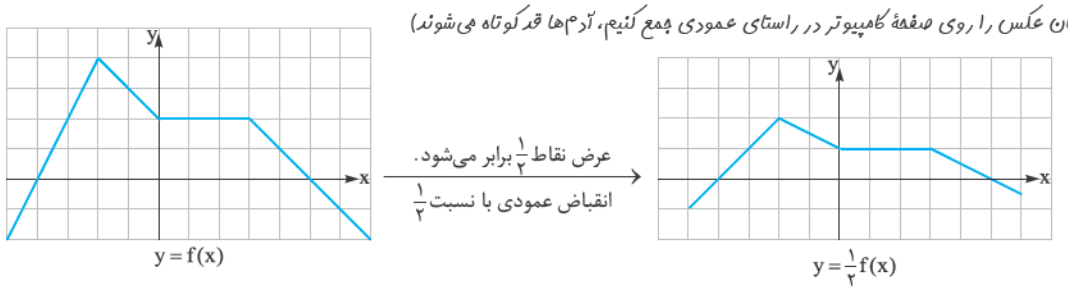
اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، عرض هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.

اگر $k>0$ باشد، برای k دو حالت در نظر می‌گیریم:

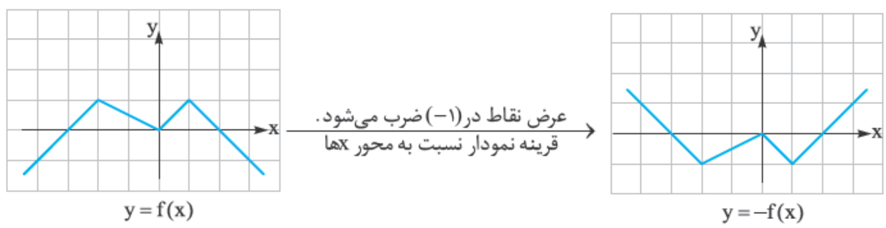
۱ اگر $k>1$ باشد، عرض نقاط تابع $kf(x)$ بزرگ‌تر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور yها با نسبت k انبساط عمودی یافته است: *(درست مثل این‌که یک عکس را روی صفحهٔ کامپیوتر در راستای عمودی بکشید، آدم‌ها قدشان بلند می‌شود!)*



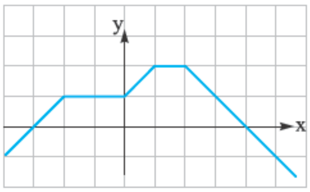
۲ اگر $0<k<1$ باشد، عرض نقاط تابع $kf(x)$ کوچک‌تر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور yها انقباض عمودی یافته است: *(همان عکس را روی صفحهٔ کامپیوتر در راستای عمودی جمع کنیم، آدم‌ها قدکوتاه می‌شوند)*



۳ اگر $k=-1$ باشد (یعنی تابع $y=-f(x)$)، نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه می‌شود:

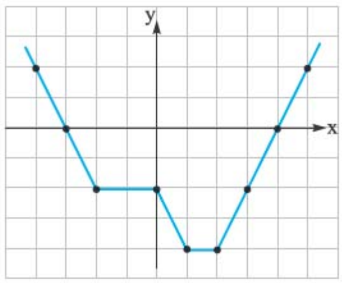


۴) اگر $k<0$ باشد، عرض تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی‌بودن k، مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه و بعد عرض نقاط در $|k|$ ضرب می‌شود:



$y=f(x)$

عرض تمام نقطه‌ها در (۲−) ضرب می‌شود.
اول قرینه نسبت به محور xها و بعد انبساط عمودی با نسبت ۲



$y=-2f(x)$

۵) دامنهٔ تابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ یکسان است.

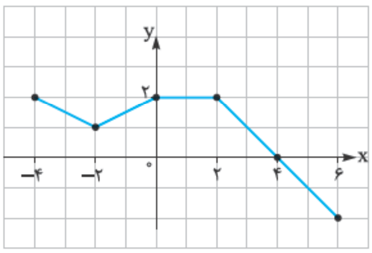
۶) برد تابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ معمولاً با هم متفاوت است.

۷) نقاط برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ با محور xها، یکسان است.

ت) رسم نمودار $y=f(kx)$

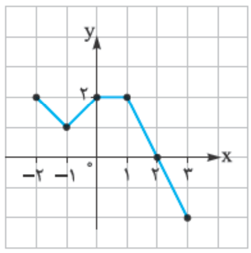
نمودار تابع $y=f(kx)$ با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. اگر $k>0$ باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $k>1$ باشد، نمودار تابع در راستای محور xها با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود، یعنی طول هر کدام از نقاط تابع $y=f(kx)$ برابر $\frac{1}{k}$ طول نقطهٔ متناظرش در نمودار تابع $y=f(x)$ است: *(چون $k>1$ است پس $\frac{1}{k}<1$ می‌شود. برای همین می‌گوییم با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود)*



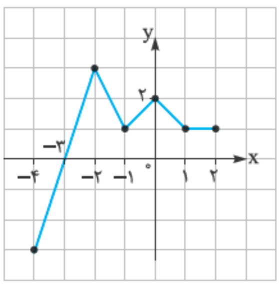
$y=f(x)$

طول هر کدام از نقاط در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌شود.
انقباض افقی با نسبت $\frac{1}{2}$



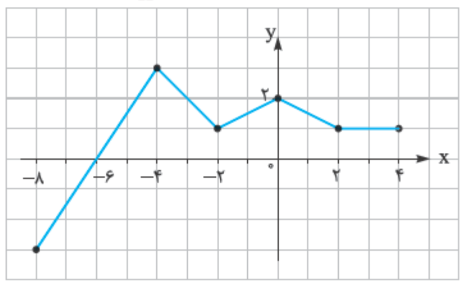
$y=f(2x)$

۲) اگر $0<k<1$ باشد، نمودار تابع در راستای محور xها با نسبت $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود *(چون $0<k<1$ است، پس $\frac{1}{k}>1$ می‌شود و برای همین می‌شود انبساط!)*، یعنی طول هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود:



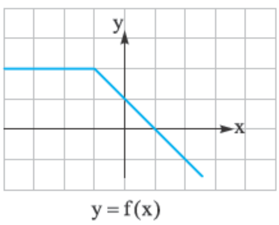
$y=f(x)$

طول هر کدام از نقاط در ۲ ضرب می‌شود.
انبساط افقی با نسبت ۲



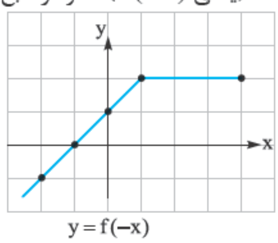
$y=f(\frac{1}{2}x)$

۳) اگر $k=-1$ باشد (یعنی $f(-x)$)، نمودار تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود:



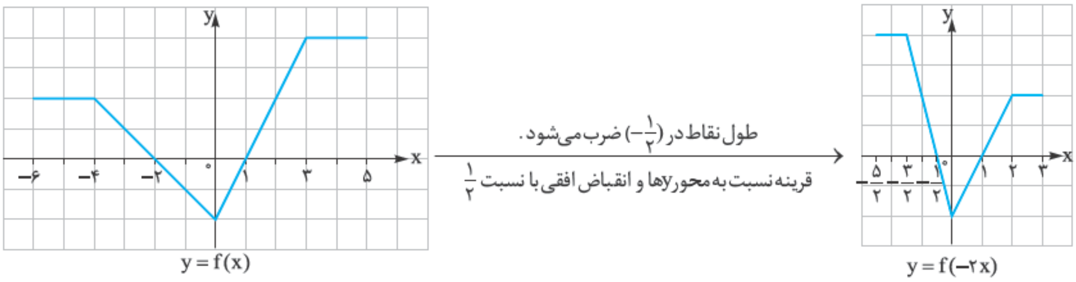
$y=f(x)$

طول هر کدام از نقاط در (۱−) ضرب می‌شود.
قرینه نسبت به محور yها



$y=f(-x)$

۴ اگر $k<0$ باشد، طول تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی‌بودن k مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور yها قرینه و بعد با نسبت $\frac{1}{|k|}$ منقبض یا منبسط شود:



۵ دامنهٔ تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ معمولاً با هم متفاوت است.

۶ برد تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ یکسان است.

۷ نقاط برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ و محور yها، یکسان است.

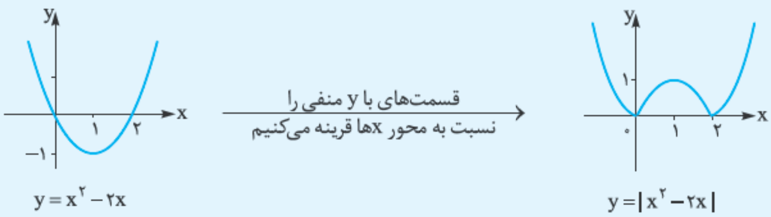
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

می‌دانیم قدرمطلق تمام مقادیر منفی را به مثبت تبدیل می‌کند، پس برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ باید قسمت‌های منفی نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال و پاسخ

مثال نمودار تابع $y=|x^2-2x|$ را رسم کنید.

پاسخ ابتدا نمودار تابع $y=x^2-2x$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم نمودار تابع $y=x^2-2x$ یک سهمی است با رأس $S(-\frac{b}{2a},f(-\frac{b}{2a}))=(1,-1)$ که از نقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ می‌گذرد، پس:



برای این‌که تمام این‌ها را که دیدیم با هم قاطی نکنیم، همه را در یک جدول می‌آوریم:

نتیجه	تأثیر در راستای	تغییر
انتقال به اندازهٔ $(-a)$ واحد در راستای محور xها	محور xها	$f(x) \Rightarrow f(x+a)$
انبساط یا انقباض با نسبت $\frac{1}{k}$ در راستای محور xها	محور xها	$f(x) \Rightarrow f(kx)$
قرینه نسبت به محور yها	محور xها	$f(x) \Rightarrow f(-x)$
انتقال به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها	محور yها	$f(x) \Rightarrow f(x)+a$
انبساط یا انقباض با نسبت k در راستای محور yها	محور yها	$f(x) \Rightarrow kf(x)$
قرینه نسبت به محور xها	محور yها	$f(x) \Rightarrow -f(x)$
قسمت‌های با عرض منفی را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم	محور yها	$f(x) = \|f(x)\|$

سؤال‌های امتحانی

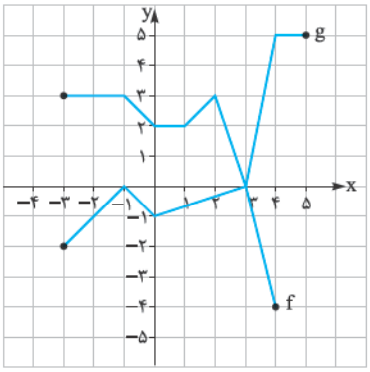
۱۰- در هر کدام از موارد زیر توابع fog و gof را پیدا کنید.

الف) $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۰),(۴,-۱)\}\ ,\ g=\{(-۱,۲),(۱,۰),(۲,۱),(-۲,۱)\}$

ب) $f=\{(-۱,۰),(۱,-۱),(۲,۱),(-۲,۰)\}\ ,\ g=\{(۰,۵),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲)\}$

۱۱- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۲)\}$ باشد، fof و fofof را پیدا کنید.

۱۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع‌های f و g را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را (در صورت وجود) پیدا کنید.



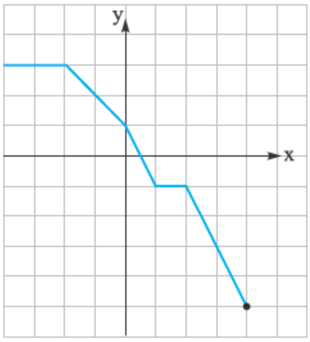
$(fog)(۴)$

$(fog)(۰)$

$(gof)(۳)$

$(gof)(۴)$

۱۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع f را نشان می‌دهد. مقادیر زیر را (در صورت وجود) بیابید.



$(fof)(-۴)$

$(fof)(۰)$

$(fof)(۵)$

$(fof)(۲)$

۱۴- اگر $f(x)=x^۴-۲x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ باشد، ضابطهٔ fog و gof را پیدا کنید.

۱۵- اگر $f(x)=x^۳+۳$ و $(fog)(x)=x^۳-۳x^۲+۳x+۲$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

۱۶- اگر $g(x)=۴x+۱$ و $(gof)(x)=(۲x+۱)^۲$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

۱۷- در هر قسمت دامنهٔ تابع‌های fog و gof را پیدا کنید.

الف) $f(x)=x-۳\ ,\ g(x)=\sqrt{x-۴}$

ب) $f(x)=\dfrac{۲x}{x-۳}\ ,\ g(x)=\dfrac{x+۲}{x}$

پ) $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}\ ,\ g(x)=\sqrt{x-۴}$

۱۸- مقدار $(fog)(۰)$ و $(fog)(۱)$ را در هر کدام از موارد زیر (در صورت وجود) پیدا کنید.

الف) $f(x)=x^۲+۲\ ,\ g(x)=\sqrt{۲x-۱}$

ب) $f(x)=\cos(\pi x)\ ,\ g(x)=x^۲-\frac{۱}{۲}x$

پ) $f(x)=\tan x\ ,\ g(x)=\frac{\pi}{۲}(x+۱)$

ت) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^۴-۱}$

۱۹- هر کدام از تابع‌های زیر را به شکل ترکیب دو تابع بنویسید.

الف) $h(x)=\sqrt{۳x^۲-۱}$

ب) $h(x)=\dfrac{۲x^۳+۱}{۳x^۳-۵}$

۲۰- در هر کدام از موارد زیر با توجه به ضابطه‌های f و g، معادلهٔ داده‌شده را حل کنید.

الف) $f(x)=۳x+۲\ ,\ g(x)=x^۲+x+۵\ ,\ (gof)(x)=۱۷$

ب) $f(x)=x^۲-x\ ,\ g(x)=x^۳-۵\ ,\ (fog)(x)=۶$

۲۱- نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

الف) $y=2\sin x$

ب) $y=-\frac{1}{2}\sin x$

پ) $y=\sin 2x$

ت) $y=\sin\frac{x}{2}$

۲۲- ابتدا دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را تعیین کنید. سپس نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر کدام را بنویسید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-1}$

ب) $f(x)=\sqrt{-x}$

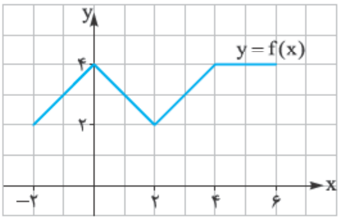
پ) $f(x)=-\sqrt{-x}$

ت) $f(x)=\sqrt{2x}$

ث) $f(x)=-2\sqrt{x}$

ج) $f(x)=\sqrt{-x+2}$

۲۳- اگر نمودار f به شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(2x)-1$

ب) $y=\frac{1}{2}f(-x)+1$

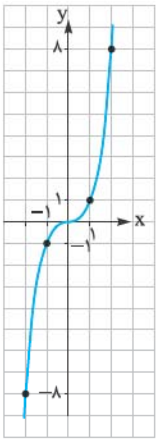
پ) $y=-f(x+1)+2$

ت) $y=\frac{1}{2}f(-\frac{x}{2})$

ث) $y=|f(-2x)-3|$

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- اول نمودار تابع $y = x^۳$ را رسم می‌کنیم و بعد کارهایی را که باید روی نمودار $x^۳$ انجام دهیم تا به نمودار تابع‌های داده‌شده برسیم مشخص می‌کنیم:

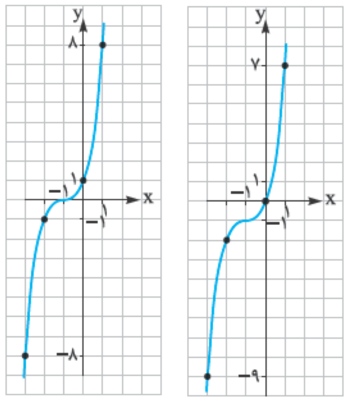


$y = x^۳$

الف) $y = (x + ۱)^۳ - ۱$

(۱) انتقال (-۱) واحد در راستای محور xها

(۲) و انتقال (-۱) واحد در راستای محور yها

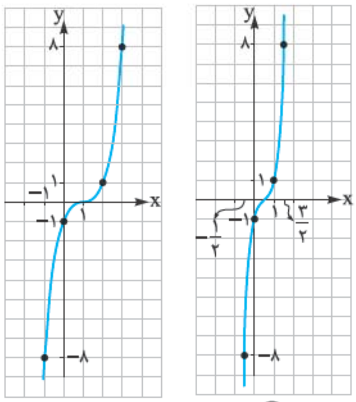


① ②

ب) $y = (۲x - ۱)^۳$

(۱) انتقال $(+۱)$ واحد در راستای محور xها

(۲) و انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور xها



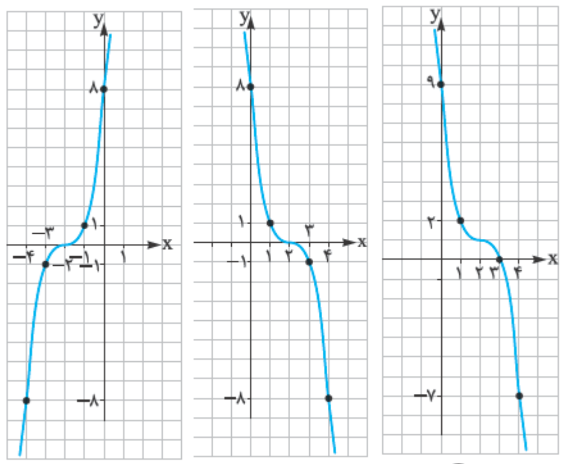
① ②

پ) $y = (-x + ۲)^۳ + ۱$

(۱) انتقال (-۲) واحد در راستای محور xها

(۲) تقارن نسبت به محور yها

(۳) انتقال $(+۱)$ واحد در راستای محور yها



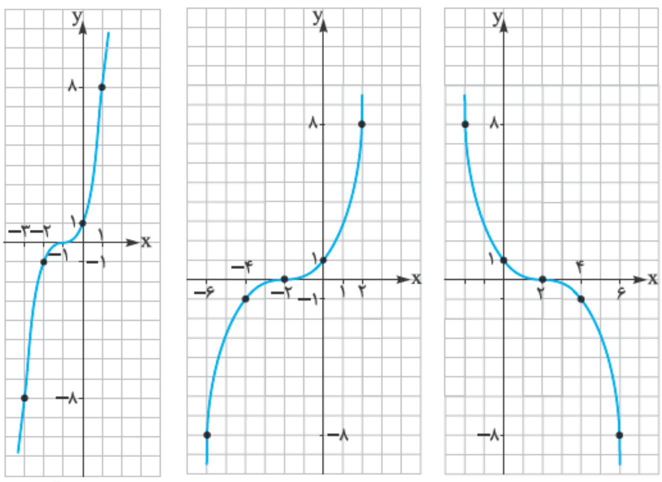
① ② ③

ت) $y = (-\frac{x}{۲} + ۱)^۳$

(۱) انتقال (-۱) واحد در راستای محور xها

(۲) انبساط با نسبت ۲ در راستای محور xها

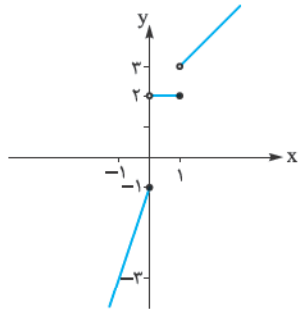
(۳) تقارن نسبت به محور yها



① ② ③

۲-

ب) $g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\le ۰ \\ ۲ & ۰<x\le ۱ \\ x+۲ & ۱<x \end{cases}$



$(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی

$(۰,۱]$ ثابت

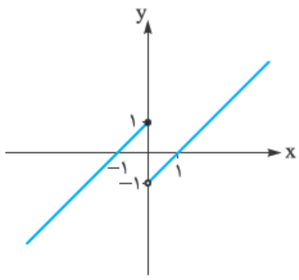
$(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی

$\Rightarrow$ درکل صعودی

$\mathbb{R}-(۰,۱] =$ دامنه

$(-\infty,-۱]\cup(۳,+\infty) =$ برد

الف) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\le ۰ \\ x-۱ & x>۰ \end{cases}$



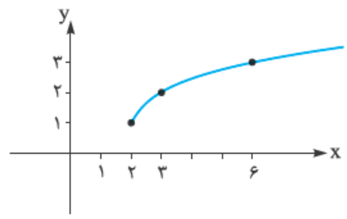
$(-\infty,۰]$ صعودی

$(۰,+\infty)$ صعودی

تابع در کل غیریکنوا است.

$\mathbb{R} =$ دامنه ، $\mathbb{R} =$ برد

ت) $k=\sqrt{x-۲}+۱$



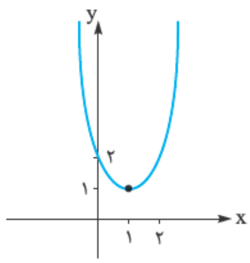
$[۲,+\infty)$ صعودی

$\Rightarrow$ در کل اکیداً صعودی

$[۲,+\infty) =$ دامنه

$[۱,+\infty) =$ برد

پ) $h(x)=x^۲-۲x+۲ \Rightarrow h(x)=(x-۱)^۲+۱$



$(-\infty,۱]$ نزولی

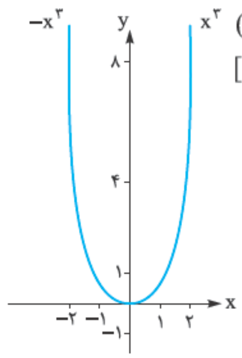
$[۱,+\infty)$ صعودی

$\Rightarrow$ در کل غیریکنوا

$\mathbb{R} =$ دامنه ، $[۱,+\infty) =$ برد

۳-

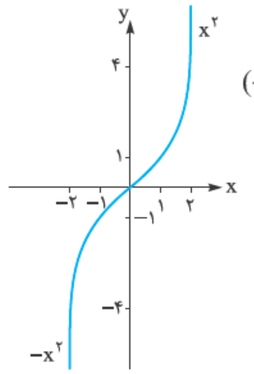
$g(x)=x^۲|x|=\begin{cases} x^۳ & x\ge ۰ \\ -x^۳ & x<۰ \end{cases}$



$(-\infty,۰]$ نزولی

$[۰,+\infty)$ صعودی $\Rightarrow$ درکل غیریکنوا

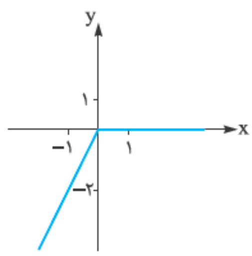
$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$



$(-\infty,+\infty)$ صعودی $\Rightarrow$ اکیداً صعودی

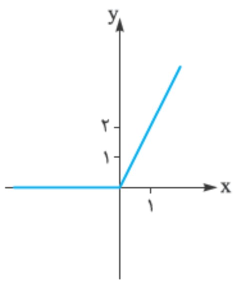
۴-

ب) $g(x)=x-|x|=\begin{cases} ۰ & x\ge ۰ \\ ۲x & x<۰ \end{cases}$



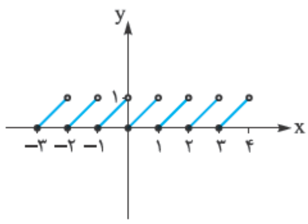
تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

الف) $f(x)=x+|x|=\begin{cases} ۲x & x\ge ۰ \\ ۰ & x<۰ \end{cases}$



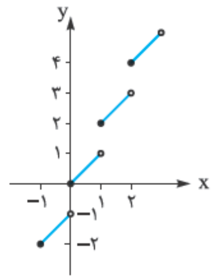
تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

پ) $h(x)=x-[x]$



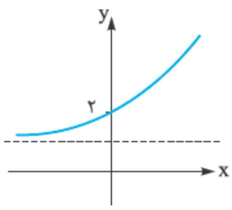
تابع نه صعودی است و نه نزولی

ت) $k(x)=x+[x]$



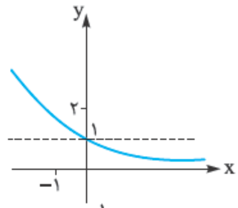
تابع اکیداً صعودی است.

۵- تابع $y=a^x$ با شرط $a>۱$ اکیداً صعودی و با شرط $۰<a<۱$ اکیداً نزولی است. اگر $a=۱$ باشد، تابع به شکل $y=۱$ تبدیل می‌شود که یک تابع ثابت است و هم صعودی است و هم نزولی.



$y=۲^x+۱$

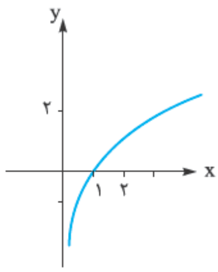
اکیداً صعودی



$y=(\frac{۱}{۲})^x$

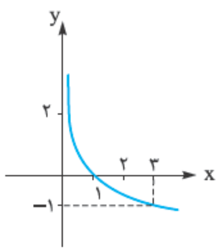
اکیداً نزولی

۶- تابع $y=\log_a x$ با شرط $a>۱$ اکیداً صعودی و با شرط $۰<a<۱$ اکیداً نزولی است.



$y=\log_۲ x$

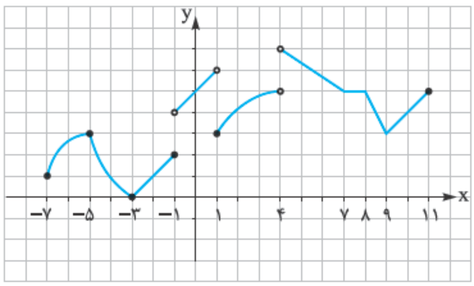
اکیداً صعودی



$y=\log_{\frac{۱}{۳}} x$

اکیداً نزولی

۷-



نزولی $[-۵,-۳]$ ، صعودی $[-۷,-۵]$

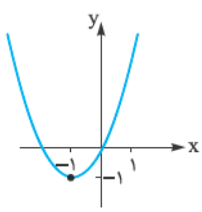
صعودی $(۱,۴]$ ، صعودی $[-۳,۱]$

صعودی $[۹,۱۱]$ ، نزولی $(۴,۹]$

۸- نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

حالا با توجه به نمودار تابع اگر بخواهیم تابع صعودی اکید باشد، باید دامنهٔ آن زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-۱,+\infty)$ باشد.

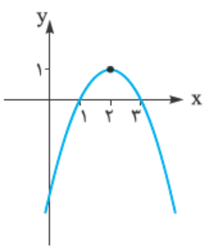
$$f(x)=x^۲+۲x \Rightarrow f(x)=(x+۱)^۲-۱$$



۹- نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=-x^۲+۴x-۳ \Rightarrow \quad f(x)=-(x^۲-۴x+۴)+۱$$

$$\Rightarrow f(x)=-(x-۲)^۲+۱$$



حالا با توجه به نمودار تابع:

الف) $[۰,+\infty)$ غیریکنوا
ب) $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی
پ) $[۱,۳]$ غیریکنوا
ت) $[۲,۴]$ اکیداً نزولی
ث) $[۰,۲]$ اکیداً صعودی
ج) $[-۱,۱]$ اکیداً صعودی

۱۰- الف) $f=\{(1,2),(2,1),(3,0),(4,-1)\}\ ,\ g=\{(-1,2),(1,0),(2,1),(-2,1)\}$

$fog=\{(-1,1),(2,2),(-2,2)\}\quad ,\quad gof=\{(1,1),(2,0),(4,2)\}$

ب) $f=\{(-1,0),(1,-1),(2,1),(-2,0)\}\ ,\ g=\{(0,5),(1,3),(2,4),(3,2)\}$

$fog=\{(3,1)\}\qquad gof=\{(-1,5),(2,3),(-2,5)\}$

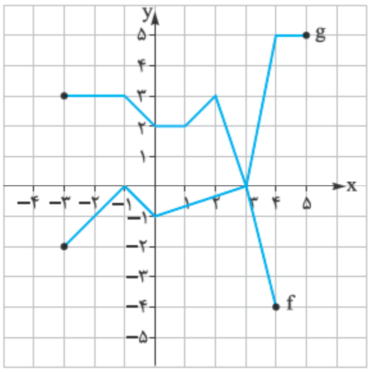
۱۱- $f=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,2)\}$

اگر از نمودار پیکانی استفاده کنیم کار راحت‌تر است:

$$fof\Rightarrow \begin{array}{l} 1\xrightarrow{f}2\xrightarrow{f}3\\ 2\longrightarrow3\longrightarrow1\\ 3\longrightarrow1\longrightarrow2\\ 4\longrightarrow2\longrightarrow3\end{array}\Rightarrow fof=\{(1,3),(2,1)(3,2),(4,3)\}$$

$$fofof\Rightarrow \begin{array}{l} 1\xrightarrow{f}2\xrightarrow{f}3\xrightarrow{f}1\\ 2\longrightarrow3\longrightarrow1\longrightarrow2\\ 3\longrightarrow1\longrightarrow2\longrightarrow3\\ 4\longrightarrow2\longrightarrow3\longrightarrow1\end{array}\Rightarrow fofof=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,1)\}$$

۱۲-



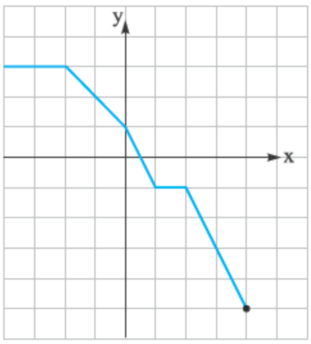
$(fog)(4)=f(g(4))=f(5)=$ تعریف‌نشده

$(fog)(0)=f(g(0))=f(-1)=3$

$(gof)(3)=g(f(3))=g(0)=-1$

$(gof)(4)=g(f(4))=g(-4)=$ تعریف‌نشده

۱۳-



$(fof)(-4)=f(f(-4))=f(3)=-3$

$(fof)(0)=f(f(0))=f(1)=-1$

$(fof)(5)=f(f(5))=$ تعریف‌نشده

$(fof)(2)=f(f(2))=f(-1)=2$

۱۴- ضابطهٔ fog و gof را با استفاده از تعریف تابع مرکب پیدا می‌کنیم: $f(x)=x^4-2x^2\ ,\ g(x)=\sqrt{x+1}$

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x+1})^4-2(\sqrt{x+1})^2=(x+1)^2-2(x+1)=x^2+2x+1-2x-2=x^2-1$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^4-2x^2+1}=\sqrt{(x^2-1)^2}=|x^2-1|$$

۱۵- داریم $(fog)(x)=f(g(x))$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(x)=f(g(x))=(g(x))^3+3\\ (fog)(x)=x^3-3x^2+3x+2\end{array}\right\}\Rightarrow (g(x))^3+3=x^3-3x^2+3x+2$$

$$\Rightarrow (g(x))^3+3=(x^3-3x^2+3x-1)+3\Rightarrow (g(x))^3=(x-1)^3\Rightarrow g(x)=x-1$$

۱۶- داریم $(gof)(x)=g(f(x))$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} g(f(x))=۴f(x)+۱ \\ g(f(x))=(۲x+۱)^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴f(x)+۱=۴x^۲+۴x+۱ \Rightarrow ۴f(x)=۴(x^۲+x) \Rightarrow f(x)=x^۲+x$$

۱۷- الف) $f(x)=x-۳ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x-۴} \Rightarrow D_g=[۴,+\infty)$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq ۴ \mid \underbrace{\sqrt{x-۴}\in\mathbb{R}}_{\text{برقرار است}}\}=[۴,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x-۳\geq ۴\}=\{\mathbb{R} \mid x\geq ۷\}=[۷,+\infty)$$

ب) $f(x)=\frac{۲x}{x-۳} \Rightarrow D_f: x\neq ۳$ $\qquad g(x)=\frac{x+۲}{x} \Rightarrow D_g: x\neq ۰$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰ \mid \frac{x+۲}{x}\neq ۳\}=\{x\neq ۰ \mid x+۲\neq ۳x\}=\{x\neq ۰ \mid x\neq ۱\}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\neq ۳ \mid \frac{۲x}{x-۳}\neq ۰\}=\{x\neq ۳ \mid x\neq ۰\}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$$

پ) $f(x)=\frac{x}{x-۱} \Rightarrow D_f: x\neq ۱$ $\qquad g(x)=\sqrt{x-۴} \Rightarrow D_g: x\geq ۴$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\neq ۱\}=\{x\geq ۴ \mid x-۴\neq ۱\}=\{x\geq ۴ \mid x\neq ۵\}=[۴,+\infty)-\{۵\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\neq ۱ \mid \frac{x}{x-۴}\geq ۴\}$$

برای حل نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۴}\geq ۴$ باید همهٔ عوامل را بیاوریم یک طرف و کسر ساده‌شده را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{x}{x-۱}\geq ۴ \Rightarrow \frac{x}{x-۱}-۴\geq ۰ \Rightarrow \frac{x-۴x+۴}{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow \frac{-۳x+۴}{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow$$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۴}{۳}$		$+\infty$
$-۳x+۴$		$+$		$+$	۰	$-$	
$x-۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{-۳x+۴}{x-۱}$		$-$	ت‌ن	$+$	۰	$-$	

$$\Rightarrow ۱< x\leq \frac{۴}{۳}$$

پس دامنهٔ gof برابر است با:

$$D_{gof}=\{x\neq ۱ \mid ۱< x\leq \frac{۴}{۳}\}=(۱,\frac{۴}{۳}]$$

۱۸- الف) $f(x)=x^۲+۲\ ,\ g(x)=\sqrt{۲x-۱}$ $\qquad (fog)(۰)=f(g(۰))=f(\sqrt{۰-۱})=$ تعریف‌نشده

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(\sqrt{۲-۱})=f(۱)=۳$$

ب) $f(x)=\cos(\pi x)\ ,\ g(x)=x^۲-\frac{۱}{۲}x$ $\qquad (fog)(۰)=f(g(۰))=f(۰)=\cos(۰)=۱$

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۱-\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲})=۰$$

پ) $f(x)=\tan x\ ,\ g(x)=\frac{\pi}{۲}(x+۱)$ $\qquad (fog)(۰)=f(g(۰))=f(\frac{\pi}{۲}(۰+۱))=f(\frac{\pi}{۲})=\tan\frac{\pi}{۲}=$ تعریف‌نشده

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(\frac{\pi}{۲}(۱+۱))=f(\pi)=\tan\pi=۰$$

ت) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^۴-۱}$ $\qquad (fog)(۰)=f(g(۰))=f(\sqrt{۰-۱})=$ تعریف‌نشده

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(\sqrt{۱-۱})=f(۰)=\sqrt{۱-۰}=۱$$

۱۹-

الف) $h(x)=\sqrt{۳x^{۲}-۱} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۳x-۱}$ ، $\underset{g(x)=x^{۲}}{\downarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt{۳x-۱} \\ g(x)=x^{۲} \\ h(x)=(fog)(x) \end{cases}$$

ب) $h(x)=\dfrac{۲x^{۳}+۱}{۳x^{۳}-۱} \Rightarrow f(x)=\dfrac{۲x+۱}{۳x-۱}$ ، $\underset{g(x)=x^{۳}}{\downarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{۲x+۱}{۳x-۱} \\ g(x)=x^{۳} \\ h(x)=(fog)(x) \end{cases}$$

۲۰-

الف) $f(x)=۳x+۲\ ,\ g(x)=x^{۲}+x+۵\ ,\ (gof)(x)=۱۷$

$$(gof)(x)=۱۷ \Rightarrow g(x)=۱۷ \Rightarrow x^{۲}+x+۵=۱۷ \Rightarrow x^{۲}+x-۱۲=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۴ \end{cases}$$

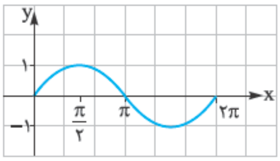
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=۳ \Rightarrow ۳x+۲=۳ \Rightarrow x=\dfrac{۱}{۳} \\ f(x)=-۴ \Rightarrow ۳x+۲=-۴ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

ب) $f(x)=x^{۲}-x\ ,\ g(x)=x^{۳}-۵\ ,\ (fog)(x)=۶$

$$(fog)(x)=۶ \Rightarrow f(x)=۶ \Rightarrow x^{۲}-x=۶ \Rightarrow x^{۲}-x-۶=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)=۳ \Rightarrow x^{۳}-۵=۳ \Rightarrow x^{۳}=۸ \Rightarrow x=۲ \\ g(x)=-۲ \Rightarrow x^{۳}-۵=-۲ \Rightarrow x^{۳}=۳ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۳} \end{cases}$$

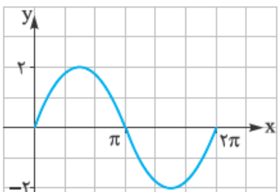
۲۱- اول نمودار تابع $y=\sin x$ را با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم و بعد نمودار تابع‌های خواسته‌شده را از روی آن رسم می‌کنیم:



$y=\sin x$

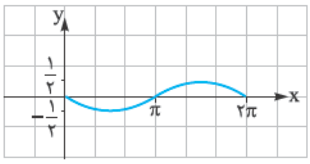
الف) $y=۲\sin x$

عرض نقاط در ۲ ضرب می‌شوند. $\longrightarrow$



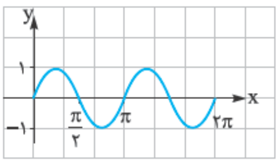
ب) $y=-\dfrac{۱}{۲}\sin x$

نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود و عرض نقاط در $(+\frac{۱}{۲})$ ضرب می‌شود. $\longrightarrow$



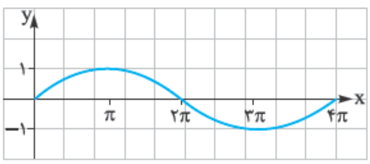
پ) $y=\sin ۲x$

نمودار با نسبت $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور xها منقبض می‌شود. $\longrightarrow$

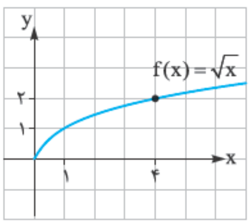


ت) $y=\sin \dfrac{x}{۲}$

نمودار با نسبت ۲ در راستای محور xها منبسط می‌شود. $\longrightarrow$



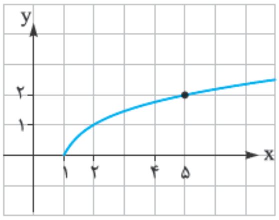
۲۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم و دامنه و بردش را تعیین می‌کنیم:



$$D_f=[۰,+\infty)\ ,\ R_f=[۰,+\infty)$$

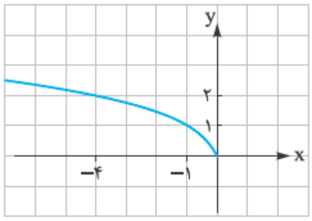
الف) $f(x)=\sqrt{x-۱}$ $\xrightarrow[\text{راستای محور xها}]{\text{انتقال (+۱) واحد در}}$

دامنه $=[۱,+\infty)$ ، برد $=[۰,+\infty)$



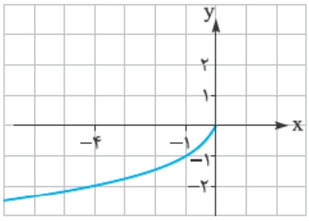
ب) $f(x)=\sqrt{-x}$ $\xrightarrow{\text{تقارن نسبت به محور yها}}$

دامنه $=(-\infty,۰]$ ، برد $=[۰,+\infty)$



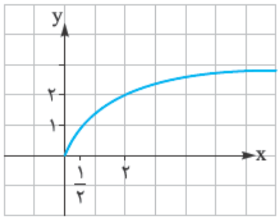
پ) $f(x)=-\sqrt{-x}$ $\xrightarrow[\text{بعد تقارن نسبت به محور xها}]{\text{تقارن نسبت به محور yها و}}$

دامنه $=(-\infty,۰]$ ، برد $=(-\infty,۰]$



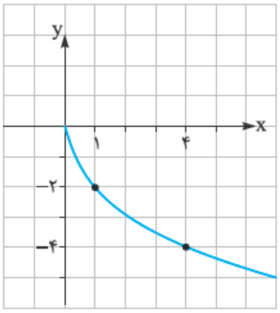
ت) $f(x)=\sqrt{۲x}$ $\xrightarrow[\text{در راستای محور xها}]{\text{انقباض با نسبت }\frac{۱}{۲}}$

دامنه $=[۰,+\infty)$ ، برد $=[۰,+\infty)$



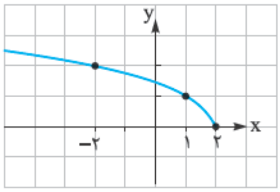
ث) $f(x)=-۲\sqrt{x}$ $\xrightarrow[\text{می‌شود}]{\text{عرض نقاط در (−۲) ضرب}}$

دامنه $=[۰,+\infty)$ ، برد $=(-\infty,۰]$



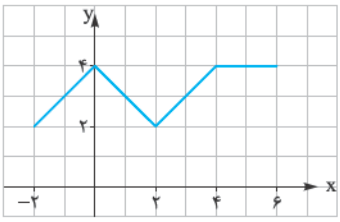
ج) $f(x)=\sqrt{-x+۲}$ $\xrightarrow[\text{محور xها و بعد تقارن نسبت به محور yها}]{\text{انتقال به اندازهٔ (−۲) واحد در راستای}}$

دامنه $=(-\infty,۲]$ ، برد $=[۰,+\infty)$



۲۳- در هر کدام از موارد نمودار توابع خواسته‌شده را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:

الف)

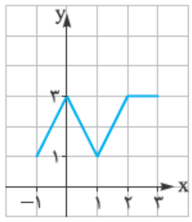


$y=f(x)$

$\xrightarrow[\text{در راستای محور xها}]{\text{انقباض با ضریب }\frac{۱}{۲}}$

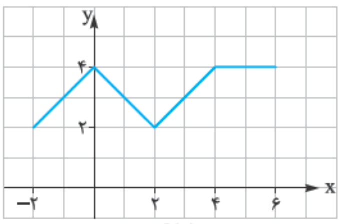
$y=f(۲x)$

$\xrightarrow[\text{در راستای محور yها}]{\text{انتقال به اندازهٔ (−۱) واحد}}$



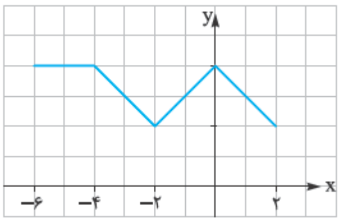
$y=f(۲x)-۱$

ب)



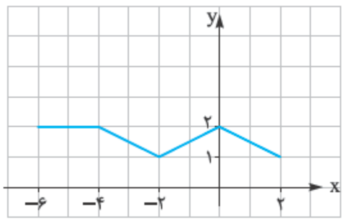
$y=f(x)$

$\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{تقارن نسبت به}}$



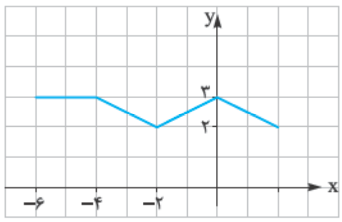
$y=f(-x)$

$\xrightarrow[\text{در راستای محور yها}]{\text{انقباض با نسبت }\frac{۱}{۲}}$



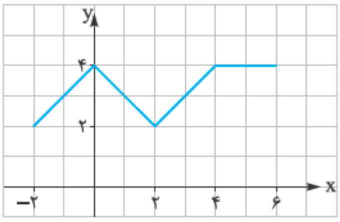
$y=\frac{۱}{۲}f(-x)$

$\xrightarrow[\text{واحد در راستای محور yها}]{\text{انتقال به اندازهٔ (+۱)}}$



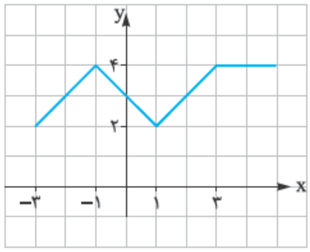
$y=\frac{۱}{۲}f(-x)+۱$

پ) $y=-f(x+1)+2$



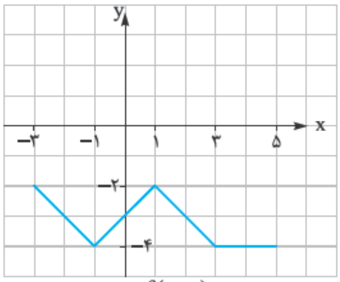
$y=f(x)$

انتقال به اندازهٔ (-1) واحد
در راستای محور xها



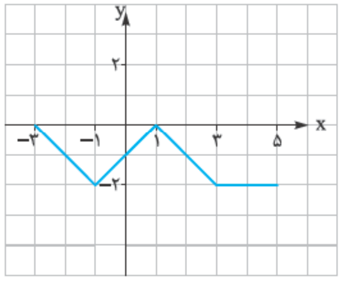
$y=f(x-1)$

تقارن نسبت به محور xها



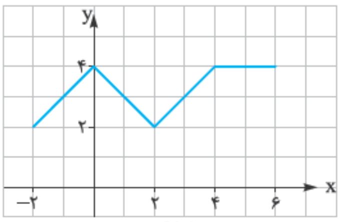
$y=-f(x+1)$

انتقال به اندازهٔ $(+2)$
واحد در راستای محور yها



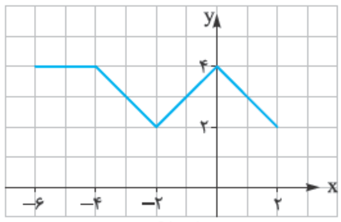
$y=-f(x+1)+2$

ت) $y=\frac{1}{2}f(-\frac{x}{2})$



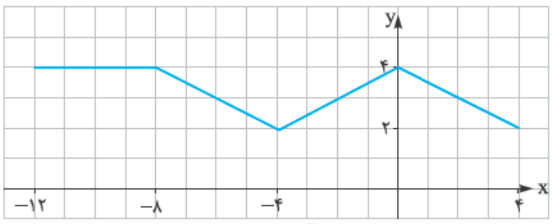
$y=f(x)$

تقارن نسبت به محور yها



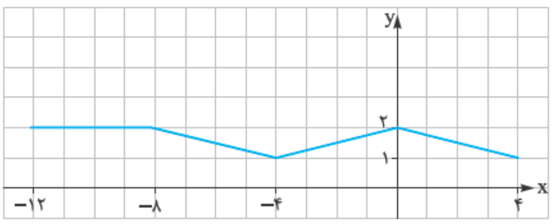
$y=f(-x)$

انبساط با ضریب ۲
در راستای محور xها



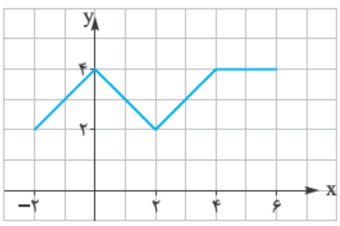
$y=f(-\frac{x}{2})$

انقباض با نسبت $\frac{1}{2}$
در راستای محور yها



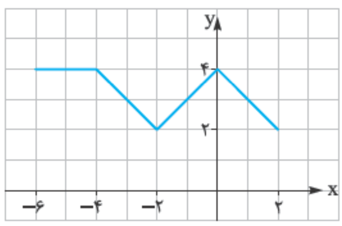
$y=\frac{1}{2}f(-\frac{x}{2})$

ث) $y=|f(-2x)-3|$



$y=f(x)$

تقارن نسبت به محور yها



$y=f(-x)$

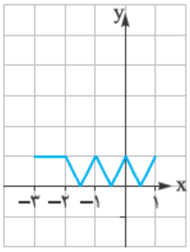
انقباض با نسبت $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور xها ←

$y = f(-۲x)$

انتقال به اندازهٔ (−۳) واحد در راستای محور yها ←

$y = f(-۲x) - ۳$

قرینهٔ قسمت‌های با عرض منفی نسبت به محور xها ←



$y = |f(-۲x) - ۳|$