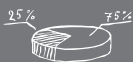


درس ۳: دنباله هندسی



مثال: الگوی دنباله $۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, \dots$ را به دست آورید.

$$۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳ \xrightarrow{\times ۳} ۹ \xrightarrow{\times ۳} ۲۷ \xrightarrow{\times ۳} ۸۱$$

پاسخ:

پس می‌توانیم بگوییم هر جمله از ضرب یک عدد ثابت غیر صفر در جمله قبل به دست آمده است. به چنین دنباله‌هایی می‌گوییم **دنباله هندسی** و به عدد ثابتی که در اینجا ۳ است می‌گوییم **نسبت مشترک** دنباله هندسی که معمولاً آن را با r نشان می‌دهند.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 \times r$$

$$a_3 = a_2 \times r = \underbrace{a_1 \times r}_{a_2} \times r = a_1 \times r^2$$

$$a_4 = a_3 \times r = \underbrace{a_1 \times r^2}_{a_3} \times r = a_1 \times r^3$$

⋮

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

پس اعضای این دنباله به شکل $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots$ هستند.

دنباله هندسی: یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots$ است که در آن $a_1 \neq 0$ «جمله اول» و $r \neq 0$ «نسبت مشترک» دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید. رابطه بازگشتی این دنباله به صورت $a_{n+1} = a_n \times r, a_1 = a$ است.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

برای به دست آوردن نسبت مشترک کافی است هر جمله را تقسیم بر جمله قبلیش کنید.

مثال: دنباله هندسی‌ای بنویسید که جمله اول آن ۲ و نسبت مشترک آن ۳ باشد.

$$۲ \xrightarrow{\times ۳} ۶ \xrightarrow{\times ۳} ۱۸ \xrightarrow{\times ۳} ۵۴ \Rightarrow ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, \dots$$

پاسخ: نمایش دنباله اعداد:

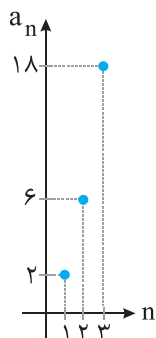
$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{\substack{a_1=2 \\ r=3}} a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

نمایش ضابطه تابعی دنباله:

$$a_{n+1} = r a_n, a_1 = a \xrightarrow{\substack{a_1=2 \\ r=3}} a_{n+1} = 3 a_n, a_1 = 2$$

نمایش رابطه بازگشتی دنباله:

نمایش نمودار دنباله:



در فصل بعدی می‌خوانید که این نقاط روی نمودار یک تابع نمایی که یک تابع غیرخطی است، قرار دارند پس دنباله هندسی یک الگوی غیرخطی است ولی دنباله حسابی یک الگوی خطی بود.

مثال: نمایش‌های مختلف دنباله $۱, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲۵}, \frac{۱}{۱۲۵}, \frac{۱}{۶۲۵}, \dots$ را بنویسید.

پاسخ: جمله اول $a_1 = 1$ است. برای به دست آوردن نسبت مشترک، یک جمله را تقسیم بر جمله قبلیش می‌کنیم. (فرقی نمی‌کند

$$r = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad r = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

کدام جمله)

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[r=\frac{1}{5}]{a_1=1} a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

نمایش ضابطه تابعی دنباله:

$$a_{n+1} = r a_n, a_1 = a \xrightarrow[r=\frac{1}{5}]{a_1=1} a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n, a_1 = 1$$

نمایش رابطه بازگشتی دنباله:

مثال: نمایش‌های مختلف دنباله $a_n = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ را بنویسید.

$$a_n = \underbrace{100}_{a_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow a_1 = 100, r = \frac{1}{4}$$

پاسخ:

$$100 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{100}{4} = 25 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{25}{4} = 6.25 \Rightarrow 100, 25, 6.25, \dots$$

نمایش دنباله اعداد:

$$a_{n+1} = r a_n, a_1 = a \xrightarrow[r=\frac{1}{4}]{a_1=100} a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n, a_1 = 100$$

نمایش رابطه بازگشتی دنباله:

دنباله‌ای که در آن $r > 1$ باشد، دنباله افزایشی و دنباله‌ای که در آن $0 < r < 1$ باشد، دنباله کاهش‌ی نام دارد. اگر $r = 1$ باشد، دنباله ثابت است.

پایان

در دنباله $4, -2, 1, \dots$ چندمین جمله برابر $\frac{1}{16}$ است؟

$$4 \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{2}\right)} -2 \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{2}\right)} 1 \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{2}\right)} \frac{-1}{2}$$

پاسخ: سعی می‌کنیم الگوی این اعداد را پیدا کنیم:

چون عدد ثابتی، در هر جمله ضرب شده است پس دنباله هندسی است. برای نوشتن ضابطه دنباله هندسی به جمله اول و نسبت مشترک نیاز داریم. برای به دست آوردن نسبت مشترک یک جمله را تقسیم بر جمله قبلیش می‌کنیم.

$$r = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[r=\frac{-1}{2}]{a_1=4} a_n = 4 \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

حال که ضابطه را به دست آوردیم برابر با عددی که گفته است قرار می‌دهیم.

$$4 \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16 \times 4} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^4 \times 2^2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^6 \Rightarrow n-1=6 \Rightarrow n=7$$



مثال: اگر جمله چهارم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب برابر $\frac{128}{2187}$ و $\frac{1}{27}$ باشد، جمله اول این دنباله چند است؟

پاسخ: در این مدل سوالات باید با استفاده از اطلاعاتی که به ما داده است، مجهول مسئله را به دست آوریم.

$$\begin{cases} a_4 = \frac{1}{27} \\ a_8 = \frac{128}{2187} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = \frac{1}{27} \\ a_1 r^7 = \frac{128}{2187} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = \frac{1}{27} \\ r^4 (a_1 r^3) = \frac{128}{2187} \end{cases} \Rightarrow r^4 \left(\frac{1}{27}\right) = \frac{128}{2187}$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{128}{2187} \times \frac{27}{1} = \frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 r^3 = \frac{1}{27} \xrightarrow[r=\frac{2}{3}]{r=\frac{2}{3}} a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow a_1 \left(\frac{8}{27}\right) = \frac{1}{27} \Rightarrow a_1 = 1$$

مثال: جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷، و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_3 = 27 \\ a_5 = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^2 = 27 \\ a_1 r^4 = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^2 = 27 \\ r^2 (a_1 r^2) = 243 \end{cases} \Rightarrow r^2 (27) = 243 \Rightarrow r^2 = \frac{243}{27} = 9$$

پاسخ:

$$a_7 = a_1 r^6 = r^2 (a_1 r^4) = r^2 (243) = 9 \times 243 = 2187$$

پایان

در یک دنباله هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ است. مجموع این ۶ جمله کدام است؟ (فرع از کشور ۹۳)

۱۱۵ (۴)

۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۳۳ (۱)

پاسخ: با استفاده از اطلاعاتی که داریم سعی می‌کنیم خواسته مسئله را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} a_1 + a_6 = 81 \\ a_2 + a_5 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r^5 = 81 \\ a_1 r + a_1 r^4 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r = 81 \\ r^4 (a_1 + a_1 r) = 16 \end{cases} \Rightarrow r^4 (81) = 16 \Rightarrow r^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow r^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 81 + a_2 + a_5 + 16 = 97 + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 97 + r^2 (a_1 + a_1 r)$$

$$= 97 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (81) = 97 + \frac{4}{9} \times 81 = 97 + 4 \times 9 = 97 + 36 = 133$$

گزینه «۱» صحیح است.



چند نکته در مورد دنباله‌های هندسی

۱ محاسبه نسبت مشترک با داشتن دو جمله:

اگر a_m و a_n دو جمله از یک دنباله هندسی باشند، نسبت مشترک دنباله از رابطه $r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$ به دست می‌آید.

مثال: اگر جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۸ و -64 باشند. نسبت مشترک این دنباله برابر است با:

$$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \xrightarrow[n=6, m=3]{a_6=-64, a_3=8} r^{6-3} = \frac{a_6}{a_3} = \frac{-64}{8} = -8 = (-2)^3 \Rightarrow r^3 = (-2)^3 \Rightarrow r = -2$$

۲ شرط تشکیل دنباله هندسی: برای اینکه سه عدد a, b, c تشکیل دنباله هندسی دهند باید $b^2 = ac$ یا $b = \pm\sqrt{ac}$ باشد. به b واسطه

هندسی بین a و c می‌گوییم.

مثال: X چه عددی باشد تا اعداد $\sqrt{2}, X, 2\sqrt{2}$ نشان‌دهنده یک دنباله هندسی باشند؟

پاسخ: X باید واسطه هندسی بین $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ باشد.

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2 \times 2} = \pm 2$$

مثال: اگر $X, X+2, X+3$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار X را به دست آورید.

پاسخ: باید $X+2$ واسطه هندسی X و $X+3$ باشد.

$$(x+2)^2 = x(x+3) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow x = -4$$

۳ اگر جملات یک دنباله را در عددی ضرب کنیم، نسبت مشترک تغییری نمی‌کند.

مثال: اگر هر یک از جملات یک دنباله هندسی ۴ برابر شوند، نسبت مشترک تغییری نمی‌کند.

۴ در یک دنباله هندسی اگر $n+m=p+q$ آنگاه $a_n \times a_m = a_p \times a_q$.

مثال: در یک دنباله هندسی اگر جمله پنجم و هشتم به ترتیب برابر $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{128}$ باشند، حاصل ضرب جملات دوم و یازدهم چند

است؟

پاسخ: چون $5+8=2+11$ پس:

$$a_2 \times a_{11} = a_5 \times a_8 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{128} = \frac{1}{4^4} \times \frac{1}{2^7} = \frac{1}{2^{11}}$$

۵ درج واسطه هندسی: اگر m عدد را میان دو عدد a و b قرار دهیم به گونه‌ای که این $m+2$ عدد، تشکیل دنباله هندسی بدهند، نسبت

مشترک این دنباله از رابطه $r^{m+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید.

مثال: بین ۳ و ۸۱ چند عدد باید قرار دهیم تا یک دنباله هندسی با نسبت مشترک ۳ حاصل شود.

پاسخ: فرقی نمی‌کند کدام را a یا b بگیریم. $m+1=3 \Rightarrow m=2$

$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \xrightarrow[r=3, b=81]{a=3} 3^{m+1} = \frac{81}{3} = 27 = 3^3 \Rightarrow m+1=3 \Rightarrow m=2$$

مثال: بین دو عدد ۱۰۰ و $\frac{25}{64}$ ، سه واسطه هندسی قرار داده‌ایم، جمله وسط این دنباله چند است؟

پاسخ:

$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \xrightarrow[m=3]{a=100, b=\frac{25}{64}} r^{3+1} = \frac{\frac{25}{64}}{100} = \frac{25}{64 \times 100} = \frac{1}{256} = \frac{1}{4^4}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2 \Rightarrow r^4 = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2 \Rightarrow r = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow 100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$$



مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی



$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

مجموع n جمله اول دنباله هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ ، از رابطه مقابل به دست می آید:

مثال: مجموع جملات دنباله $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{5}$ را به دست آورید.

پاسخ: به n نیاز داریم، باید ببینیم $\frac{1}{8}$ جمله چندم است.

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow n-1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}, n=6} S_6 = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \times \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \times \frac{63}{32} = \frac{63}{256}$$

مثال: در دنباله $\frac{1}{3}, a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ ، $a_1 = \frac{1}{3}$ را به دست آورید.

$$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

پاسخ: نسبت هر دو جمله متوالی برابر نسبت مشترک است.

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}, n=7} S_7 = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{2187}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{2186}{2187}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{2186 \times 3}{2 \times 2187} = \frac{6558}{8748}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$



مثال: اگر مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی برابر $S_n = 3^n \times \frac{1}{3}$ باشد، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(3^n \times \frac{1}{3}\right) - \left(3^{n-1} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{3^n}{3} - \frac{3^{n-1}}{3} = \frac{3^n - 3^{n-1}}{3} = \frac{3^{n-1}(3-1)}{3} = \frac{3^{n-1}(2)}{3} = 3^{n-1}$$

پایان

مجموع جملات یک دنباله با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ شروع از ۷۶۸ و ختم به ۳ را به دست آورید.

پاسخ: باید به دست آوریم ۳، چندمین جمله دنباله است.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{a_1 = 768, r = \frac{1}{2}} 3 = 768 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{768} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1 = 768, r = \frac{1}{2}, n=9} S_9 = 768 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = 768 \times \frac{1 - \frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 768 \times \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = 768 \times \frac{511}{256} = 768 \times \frac{2 \times 511}{2 \times 256} = 768 \times \frac{2 \times 511}{512} = 768 \times \frac{2 \times 511}{2^9} = 768 \times \frac{2^9 \times 3 \times 511}{2^9} = 3 \times 511 = 1533$$

تبدیل مسئله توصیفی به دنباله هندسی



مثال: جمعیت یک روستا ۲۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه $\frac{1}{10}$ جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از ۳ سال چند نفر در این روستا زندگی می کنند؟

پاسخ: در مسائلی که تغییرات وابسته به سال قبل است، معمولاً با دنباله هندسی روبه رو هستیم.

$$2000 \xrightarrow{-\left(\frac{1}{10}\right)2000} 2000 - 200 = 1800 \xrightarrow{-\left(\frac{1}{10}\right)1800} 1800 - 180 = 1620 \xrightarrow{-\left(\frac{1}{10}\right)1620} 1620 - 162 = 1458$$

$$\Rightarrow 2000 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 1800 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 1620 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 1458$$

پس از ۱ سال پس از ۲ سال پس از ۳ سال



را بطور پیداکردیم؟ اگر عدد ثابتی هر سال اضافه یا کم می‌شد، دنباله ما دنباله حسابی بود؛ ولی چون تغییرات ثابت نیست و به سال قبل وابسته است پس دنباله هندسی داریم. با الگویی که گفته است، اعداد دنباله را به دست می‌آوریم که به صورت $۱۸۰۰, ۱۶۲۰, ۱۴۵۸, \dots$ هستند. حال هر دو جمله متوالی را بر هم تقسیم می‌کنیم تا هم مطمئن شویم که دنباله هندسی است هم نسبت مشترک را به دست آوریم.

$$r = \frac{۱۴۵۸}{۱۶۲۰} = \frac{۹}{۱۰} \quad \text{یا} \quad r = \frac{۱۶۲۰}{۱۸۰۰} = \frac{۹}{۱۰} \quad \text{یا} \quad r = \frac{۱۸۰۰}{۲۰۰۰} = \frac{۹}{۱۰}$$

مثال: کارفرمایی به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرد دستمزد روز اول ۱۵۰۰۰ و تا پایان ۶ روز کاری هفته، هر روز دستمزد او را

$\frac{۳}{۲}$ برابر دستمزد روز قبل اضافه کند. مجموع دستمزد او در این ۶ روز کاری چقدر است؟

$$۱۵۰۰۰ \xrightarrow{\times \frac{۳}{۲}} ۲۲۵۰۰ \xrightarrow{\times \frac{۳}{۲}} ۳۳۷۵۰$$

پاسخ:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1=15000, r=\frac{3}{2}, n=6} S_6 = 15000 \times \frac{1-(\frac{3}{2})^6}{1-(\frac{3}{2})} = 15000 \times \frac{1-\frac{729}{64}}{-\frac{1}{2}} = 15000 \times \frac{-\frac{665}{64}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 15000 \times \frac{2 \times 665}{64} = \frac{15000 \times 665}{32} = \frac{1875 \times 665}{4}$$

مثال: شخصی یک کولر به قیمت ۱ میلیون تومان می‌خرد. هزینه استهلاک این کولر هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن

است. پس از چند سال قیمت کولر به ۷۲۹،۰۰۰ تومان می‌رسد؟

پاسخ: چون میزان کاهش به سال قبل بستگی دارد پس با دنباله هندسی روبه‌رو هستیم.

$$۱,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{-\frac{1}{10}(1,000,000)} ۱,۰۰۰,۰۰۰ - ۱۰۰,۰۰۰ = ۹۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{-\frac{1}{10}(900,000)} ۹۰۰,۰۰۰ - ۹۰,۰۰۰ = ۸۱۰,۰۰۰$$

$$۱,۰۰۰,۰۰۰, ۹۰۰,۰۰۰, ۸۱۰,۰۰۰, \dots \Rightarrow ۱,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} ۹۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} ۸۱۰,۰۰۰$$

در این مدل سؤال‌ها، برای به دست آوردن نسبت مشترک می‌توانیم بگوییم چون هر سال $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$ کاهش پیدا می‌کند پس $\frac{۹}{۱۰}$

از آن باقی می‌ماند پس جملات در $\frac{۹}{۱۰}$ ضرب می‌شوند.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{a_1=1,000,000, r=\frac{9}{10}, a_n=729,000} 729,000 = 1,000,000 \times (\frac{9}{10})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{729,000}{1,000,000} = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow \frac{729}{1,000} = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow \frac{9^3}{10^3} = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow (\frac{9}{10})^3 = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow n-1=3 \Rightarrow n=4$$

ارزش کولر هر سال کم و کمتر می‌شود ولی یادتان بماند هیچ‌وقت صفر نمی‌شود؛ چون هر بار یک مقدار مثبت در $\frac{۹}{۱۰}$ ضرب می‌شود.

پاتخته

اگر داروی شیمی‌درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی فردی در ابتدا $۱۰^۱$ سلول داشته باشد، پس از ۴ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند.

$$۱۰^۱ \xrightarrow{-\frac{60}{100}(10^1)} ۱۰^۱ - \frac{6}{10}(10^1) = \frac{4}{10}(10^1) \xrightarrow{-\frac{60}{100}(\frac{4}{10}10^1)} \frac{4}{10}(10^1) - \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}(10^1)$$

پاسخ:

$$= \frac{4}{10}(10^1) - \frac{24}{100}(10^1) = \frac{16}{100}(10^1) \Rightarrow ۱۰^۱, \frac{4}{10}10^1, \frac{16}{100}10^1 \Rightarrow r = \frac{\frac{4}{10}10^1}{10^1} = \frac{4}{10}$$

یا می‌توانستیم بگوییم هر بار ۶۰٪ از بین می‌رود پس ۴۰٪ باقی می‌ماند؛ یعنی $\frac{40}{100} = \frac{4}{10}$ برابر می‌شود هر بار.

$$۱۰^۱ \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})10^۱ \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})^2 10^۱ \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})^3 10^۱ \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})^4 \times 10^۱ = \frac{4^4}{10^4} \times 10^۱ = 4^4 \times 10^{-3}$$

بار اول بار دوم بار سوم بار چهارم



نیمه عمر یک دارو مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

مثال: اگر میزان اولیه یک دارو برابر ۱۰۰ میلی گرم باشد و نیمه عمر دارو برابر ۳ ساعت باشد، داریم:

$$100 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 50 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 25 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 12.5 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 6.25 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 3.125$$

پس هر جمله، نصف جمله قبلی است. $100 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 50 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 25 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 12.5 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 6.25 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 3.125$

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

جمله عمومی نیمه عمر به صورت مقابل است:

که a_1 میزان اولیه دارو است و a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر است.

n تعداد نیمه عمرها است که برابر است با مدت زمان سپری شده تقسیم بر طول یک نیمه عمر. رابطه بازگشتی نیمه عمر به صورت

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, a_1 = a$$

مدت زمان سپری شده = تعداد نیمه عمر \times طول یک نیمه عمر

مثال: اگر میزان اولیه مصرف یک دارو ۱۵۰ میلی گرم باشد و نیمه عمر آن ۲ ساعت باشد، بعد از ۱۰ ساعت چند میلی گرم از دارو در بدن بیمار باقی می‌ماند؟

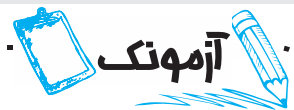
پاسخ: باید n را به دست آوریم.

$$n = \frac{\text{مدت زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 150 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 150 \times \frac{1}{32} = \frac{150}{32} = \frac{75}{16} = 4.6875$$

دنباله هندسی

$a_n = a_1 r^{n-1}$	جمله عمومی
$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ یا $r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$	نسبت مشترک
به صورت یک تابع نمایشی است.	نمودار
a, b, c تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، هرگاه $b^2 = ac$ یا $b = \pm \sqrt{ac}$ باشد. به b واسطه هندسی بین a و c گفته می‌شود.	شرط تشکیل دنباله هندسی
$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$	مجموع جملات
افزایشی $\leftarrow r > 1$ کاهشی $\leftarrow 0 < r < 1$	دنباله هندسی
تعداد جملات $\leftarrow m+2$ نسبت مشترک $\leftarrow \frac{b}{a} = r^{m+1}$	درج m واسطه هندسی بین دو عدد a و b



آزمونک

۱- بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چهار عدد صحیح طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴ شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد کدام است؟

(سراسری ۹۸)

۱۶۵۴

۱۵۴۶

۱۴۶۸

۱۴۵۶

۲- در یک دنباله هندسی با جمله اول ۲۲۴ و نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ ، جمله n م آن ۷ است. مجموع جملات این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد کدام است؟

(فاج از کشور ۹۸)

۴۵۸

۴۴۱

۴۲۰

۳۶۹

۳- در یک دنباله هندسی جمله چهارم ۸ برابر جمله اول است. اگر جمله ششم ۲۴ باشد مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

(سراسری ۹۴)

۴۸/۵

۴۷/۷۵

۴۷/۵

۴۷/۲۵



۴- به علت تورّم، بر قیمت کالایی به طور یکنواخت هر سال ۱۰ درصد افزوده می‌شود. در سال پنجم، قیمت این کالا، چند برابر قیمت سال اول می‌شود؟

(قارج از کشور ۹۵)

۱/۴۷۵۱

۱/۴۶۴۱

۱/۳۷۶۱

۱/۳۳۲

کنارشناسی ۹ دهه

تیپ ۱: درج واسطه هندسی (مشابه سؤال ۱ آزمونک)

تیپ ۲: به دست آوردن مجموع جملات با پیدا کردن مجهولات با استفاده از دو رابطه‌ای که داده است. (مشابه سؤال ۲ و ۳ آزمونک)

تیپ ۳: تبدیل مسئله توصیفی به دنباله هندسی (مشابه سؤال ۴ آزمونک)

نوبت شماست: یک سؤال از نیمه عمر طرح کنید.



$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^{4+1} = \frac{972}{4} \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r^5 = 3^5 \Rightarrow r = 3$$

۱- از فرمول درج واسطه هندسی استفاده می‌کنیم.

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36 \xrightarrow{\times 3} 108 \xrightarrow{\times 3} 324 \xrightarrow{\times 3} 972$$

$$4 + 12 + 36 + 108 + 324 + 972 = 1456$$

گزینه «۱» صحیح است.

$$224 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 112 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 56 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 28 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 14 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 7$$

۲-

$$224 + 112 + 56 + 28 + 14 + 7 = 441$$

گزینه «۳» صحیح است.

$$a_4 = 8a_1, a_6 = 24 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = ?$$

۳-

$$\begin{cases} a_4 = 8a_1 \\ a_6 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = 8a_1 \\ a_1 r^5 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow r = 2 \\ a_1 (2)^5 = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + 24 = \frac{3+6}{4} + 45 = \frac{9}{4} + 45 = \frac{9+180}{4} = \frac{189}{4} = 47/25$$

یا می‌توانستیم بعد از به دست آمدن $a_1 = \frac{3}{4}$ و $r = 2$ از فرمول مجموع جملات استفاده کنیم.

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{3}{4} \times \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{3}{4} \times \frac{1-64}{-1} = \frac{3}{4} \times \frac{-63}{-1} = \frac{3}{4} \times 63 = 47/25$$

گزینه «۱» صحیح است.

$$a_1 \xrightarrow{+\frac{1}{10}a_1} a_1 + \frac{1}{10}a_1 \xrightarrow{+\frac{1}{10}(a_1 + \frac{1}{10}a_1)} a_1 + \frac{1}{10}a_1 + \frac{1}{10}(a_1 + \frac{1}{10}a_1)$$

۴-

$$\Rightarrow a_1, a_1 + \frac{1}{10}a_1, a_1 + \frac{1}{10}a_1 + \frac{1}{10}a_1, \dots$$

$$\Rightarrow a_1, 1/11a_1, 1/21a_1, \dots \Rightarrow a_1, 1/11a_1, (1/11)^2 a_1, \dots \quad a_1 \xrightarrow{\times(1/11)} 1/11a_1 \xrightarrow{\times(1/11)} (1/11)^2 a_1$$

شاید با توجه به ظاهرش که نوشته بود افزوده می‌شود فکر می‌کردید دنباله حسابی است ولی چون به درصد بیان شده است وقتی می‌نویسیم می‌بینیم که به دنباله هندسی می‌رسیم. حال خواسته سؤال این است که قیمت کالا در سال پنجم چند برابر قیمت کالا

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^4}{a_1} = r^4 \xrightarrow{r=(1/11)} (1/11)^4 = 1/4641$$

در سال اول است:

گزینه «۳» صحیح است.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای درس ۳ از فصل ششم



(سراسری ۷۱)

۱۰۰۱. جمله پنجم در دنباله هندسی $4, -6, 9, \dots$ کدام است؟

۱) $-\frac{71}{4}$ ۲) $-\frac{51}{4}$ ۳) $\frac{81}{4}$ ۴) $\frac{61}{4}$

(سراسری ۷۲)

۱۰۰۲. جمله پنجم یک دنباله هندسی $-\frac{1}{16}$ است. اگر نسبت مشترک $-\frac{1}{4}$ باشد، جمله اول کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۰۰۳. در یک دنباله هندسی جمله پنجم، چهار برابر جمله اول است، نسبت مشترک این دنباله کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

(سراسری ۷۸)

۱۰۰۴. جمله عمومی یک دنباله هندسی $\frac{2}{3 \times 2^n}$ است. نسبت مشترک این دنباله چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

(سراسری ۷۶)

۱۰۰۵. در یک دنباله هندسی، جمله دوم ۸ برابر جمله پنجم است. نسبت مشترک کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

(سراسری ۷۲)

۱۰۰۶. در یک دنباله هندسی، جمله دوم، بیست و هفت برابر جمله پنجم است. نسبت جملات متوالی در این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) 3 ۴) 9

(سراسری ۷۷)

۱۰۰۷. در یک دنباله هندسی، جمله سوم دو برابر جمله اول است. جمله نهم چند برابر جمله اول است؟

۱) 32 ۲) 20 ۳) 18 ۴) 16

(سراسری ۶۶)

۱۰۰۸. در یک دنباله هندسی جمله چهارم ۲۴ و جمله هفتم ۱۹۲ است، جمله اول کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

(آزاد ۷۵)

۱۰۰۹. اگر a_n جمله n ام یک دنباله هندسی و $a_8 = 8a_1$ و $a_1 = 4$ باشد، جمله پنجم آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

(سراسری ۶۶)

۱۰۱۰. در یک دنباله هندسی تفاضل دو جمله پنجم و سوم $\frac{1}{33}$ است. اگر نسبت مشترک برابر $\frac{1}{4}$ باشد، جمله اول کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۱۱. اگر جمله پنجم یک دنباله هندسی برابر ۴ و جمله سوم آن ۲ باشد، جمله نهم این دنباله کدام است؟

۱) 16 ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) 8 ۴) $8\sqrt{2}$

(سراسری ۶۳)

۱۰۱۲. اگر جمله پنجم یک دنباله هندسی برابر $\frac{16}{9}$ و جمله دوم آن ۶ باشد، نسبت مشترک این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۱۳. مدیر یک کارگاه به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرده است دستمزد روز اول ۱۰۰۰ تومان و تا پایان هر هفته هر روز ۲۰ درصد به دستمزد روز قبل وی اضافه کند. دستمزد این کارگر در روز پنجم چقدر است؟

(سراسری ۸۳)

۱) $1986/3$ ۲) $2016/4$ ۳) $2073/6$ ۴) $2104/8$

(آزاد ۷۵)

۱۰۱۴. در یک دنباله هندسی، مجموع جمله دوم و سوم، ۶ برابر جمله اول است. نسبت مشترک دنباله کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) $\frac{3}{2}$

(سراسری ۷۷)

۱۰۱۵. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم $\frac{1}{5}$ برابر مجموع جملات دوم و چهارم است. نسبت مشترک جملات کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

(سراسری ۸۸)

۱۰۱۶. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ است جمله سوم این دنباله کدام است؟

۱) 6 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 12

۱۰۱۷. چهار عدد مثبت، جملات متوالی یک دنباله هندسی‌اند. مجموع دو عدد کوچک‌تر برابر ۲۰ و مجموع دو عدد بزرگ‌تر ۴۵ است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

(فاجه از کشور ۸۷)

۱) 27 ۲) 28 ۳) 29 ۴) 30

۱۰۱۸. عدد ۴ و دو عدد دیگر به ترتیب تشکیل دنباله هندسی داده‌اند و عدد ۳ با همان دو عدد دنباله حسابی تشکیل می‌دهد که اختلاف مشترک آن ۲ برابر نسبت مشترک دنباله هندسی است، «اختلاف مشترک دنباله حسابی» چقدر است؟

(آزاد ۸۳)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۰۱۹. مجموع سه جمله اول متوالی از یک دنباله هندسی ۲۶ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. نسبت مشترک دنباله کدام است؟ (آزاد ۷۷)
- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) $\frac{2}{3}$
۱۰۲۰. «نسبت مشترک» دنباله هندسی که سه جمله آن به ترتیب $y - x + 2, y, y + x - 2$ باشد، چقدر است؟ (آزاد ۷۸)
- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱
۱۰۲۱. واسطه هندسی بین اعداد $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{16}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)
- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{5}{32}$
۱۰۲۲. پنج عدد $\frac{5}{3}, a, b, c$ و $\frac{5}{12}$ به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی هستند. b کدام است؟ (سراسری ۸۱)
- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$
۱۰۲۳. واسطه هندسی بین دو ریشه معادله $x^2 - 22x + 32 = 0$ کدام است؟ (سراسری ۶۹)
- ۱) $\sqrt{26}$ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۱۶
۱۰۲۴. حاصل ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی ۱ و مجموع جملات دوم و سوم آن ۸ است. مجموع سه جمله چقدر است؟ (آزاد ۷۱)
- ۱) ۹ ۲) ۸ ۳) $\frac{65}{8}$ ۴) $\frac{57}{7}$
۱۰۲۵. کدام عدد منفی نسبت مشترک یک دنباله هندسی باشد تا مجموع سه جمله اول آن، ۷ برابر جمله اول گردد؟ (آزاد ۸۴)
- ۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶
- مجموع جملات دنباله هندسی**
۱۰۲۶. مجموع شش جمله اول از دنباله هندسی $32, 16, \dots$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)
- ۱) ۵۸ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۶
۱۰۲۷. مجموع هشت جمله دنباله هندسی $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ کدام است؟ (سراسری ۶۷)
- ۱) $\frac{1}{256}$ ۲) $\frac{5}{64}$ ۳) $\frac{255}{256}$ ۴) $\frac{230}{128}$
۱۰۲۸. اگر سه جمله $(x+4), x$ و $(x-2)$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند. مجموع هفت جمله نخستین آن کدام است؟ (آزاد ۷۴)
- ۱) ۲۵۴ ۲) ۲۵۶ ۳) ۲۵۸ ۴) ۲۷۴
۱۰۲۹. اگر در یک دنباله هندسی، جمله سوم ۲۰ و جمله پنجم ۸۰ باشد، مجموع هشت جمله اول این دنباله کدام است؟ (آزاد ۷۶)
- ۱) ۱۱۷۵ ۲) ۱۲۷۵ ۳) ۱۳۷۵ ۴) ۱۴۷۵
۱۰۳۰. در یک دنباله هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله قبلی آن است. اگر مجموع ۵ جمله اول آن $\frac{211}{27}$ باشد. جمله اول کدام است؟ (سراسری ۹۰)
- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۱۰۳۱. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{4}$ ، اگر مجموع ۸ جمله اول $63\frac{3}{4}$ باشد. جمله پنجم کدام است؟ (سراسری ۹۱)
- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۱۰۳۲. جمله اول یک دنباله هندسی ۶، نسبت مشترک ۱- و تعداد جملات آن «عددی فرد» است. مجموع جملات این دنباله چقدر است؟ (آزاد ۷۸)
- ۱) $-3n$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۰
۱۰۳۳. مجموع سه جمله اول هر دنباله هندسی با نسبت مشترک ۴- «چند برابر» جمله اول آن است؟ (آزاد ۸۴)
- ۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۸
۱۰۳۴. در یک دنباله هندسی مجموع چهار جمله نخست ۵ برابر مجموع ۲ جمله نخست آن است، نسبت مشترک کدام است؟ (آزاد ۷۵)
- ۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$
۱۰۳۵. در یک دنباله هندسی با جمله اول a و نسبت مشترک r مجموع n جمله اول از مجموع $n+1$ جمله اول آن چقدر کمتر است؟ (سراسری ۷۴)
- ۱) ar^{n-1} ۲) a^2r^{n-1} ۳) a^2r^n ۴) ar^n
۱۰۳۶. کارفرمایی به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرد: دستمزد روز اول ۳۲۰ تومان و تا پایان ۶ روز کاری هفته، هر روز دستمزد او را $\frac{1}{5}$ برابر دستمزد روز قبل پرداخت کند. مجموع دستمزد او در ۶ روز اول هفته کدام است؟ (سراسری ۷۷)
- ۱) ۶۶۵۰ ۲) ۶۷۵۰ ۳) ۶۸۵۰ ۴) ۶۹۵۰
۱۰۳۷. کارفرمایی با یک کارگر مبتدی توافق کرده است که اجرت روز اول ۶۴۰ تومان و تا پایان هفته، اجرت هر روز نسبت به روز قبل ۵۰ درصد افزایش داشته باشد. مجموع اجرت ۶ روز اول کارگر چقدر است؟ (سراسری ۷۹)
- ۱) ۱۲۲۰۰ ۲) ۱۲۳۰۰ ۳) ۱۳۲۰۰ ۴) ۱۳۳۰۰
۱۰۳۸. بین ۱ و ۸۱ چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله‌های دنباله هندسی حاصل، برابر با ۱۲۱ گردد؟ (آزاد ۷۹)
- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



۹۹۹. **گزینه ۴** سؤال دو اندیشه کلیدی دارد: ۱- مجموع ۵ جمله

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow 60 = 5a_1 + 10d \Rightarrow a_1 + 2d = 12$$

۲- مجموع دو جمله بزرگتر سه برابر مجموع سه جمله کوچکتر است:

$$a_4 + a_5 = 3(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\Rightarrow (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 3(a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d))$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 7d = 3a_1 + 3a_1 + 3d + 3a_1 + 6d \Rightarrow 7a_1 + 7d = 0$$

حال با دو رابطه به دست آمده دستگاه تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ 7a_1 + 7d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ -6a_1 = 12 \Rightarrow a_1 = -2 \end{cases}$$

$$a_1 + 2d = 12 \Rightarrow -2 + 2d = 12 \Rightarrow 2d = 14 \Rightarrow d = 7$$

۱۰۰۰. **گزینه ۳** در این سؤال، هزینه‌ها تشکیل یک دنباله حسابی

می‌دهند پس از رابطه مجموع جملات دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$a_1 + a_n = \frac{25}{100} S_n = \frac{1}{4} \times \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_n = \frac{n}{8} (a_1 + a_n) \Rightarrow 1 = \frac{n}{8} \Rightarrow n = 8$$

۱۰۰۱. **گزینه ۳** در فرمول جمله nام دنباله هندسی:

یعنی $a_1, a_n = a_1 r^{n-1}$ جمله اول و r نسبت مشترک است. (گاهی نسبت

مشترک را با q هم نشان می‌دهند) در هر دنباله هندسی، نسبت مشترک از تقسیم یک جمله بر جمله قبلی‌اش به دست می‌آید پس در دنباله این

سؤال $a_1 = 4$ و $r = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$ است. با جایگذاری در فرمول خواهیم داشت.

$$a_5 = 4 \times \left(\frac{-3}{2}\right)^{5-1} = 4 \times \left(\frac{81}{16}\right) = \frac{81}{4}$$

۱۰۰۲. **گزینه ۲** یک جمله و نسبت مشترک را داده است.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow -\frac{1}{16} = a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow -\frac{1}{16} = a_1 \frac{1}{16} \Rightarrow a_1 = -1$$

۱۰۰۳. **گزینه ۴** رابطه بین دو جمله را داده است و نسبت مشترک را

می‌خواهد، اولین کار این است که رابطه را بنویسیم: $a_5 = 4a_1$ و سپس

$$a_5 = a_1 r^4$$

جمله پنجم را بر حسب جمله اول بنویسیم یعنی:

$$a_1 r^4 = 4a_1 \Rightarrow r^4 = 4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{4} = \sqrt[2]{2} \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

دقت! توجه داشته باشید با وجود آنکه در هنگام ریشه‌گیری از طرفین؛ مانند این سؤال، ریشه‌های مثبت و منفی پیدا می‌شوند؛ ولی در اغلب تست‌های کنکور ریشه‌های منفی را داخل جواب‌ها قرار ندهاند.

۱۰۰۴. **گزینه ۳** از این موضوع الان به این شکل سؤال طرح نمی‌شود

ولی در سؤال‌ها کاربرد زیادی دارد. به جای n یک بار عدد یک بگذارید جمله اول و یک بار عدد دو بگذارید جمله دوم به دست می‌آید.

نسبت مشترک یک دنباله، برابر است با تقسیم هر جمله بر جمله قبل، یا به

طور کلی $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. برای این منظور می‌توانیم هر دو جمله متوالی را که

بخواهیم در نظر بگیریم. چون جملات اول، کوچک و ساده‌ترند، نسبت جملات

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3 \times 2^2}}{\frac{2}{3 \times 2^1}} = \frac{3 \times 2^1}{3 \times 2^2} = \frac{1}{2}$$

اول و دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 7/5 \\ a_3 + a_4 = 5/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + d = 7/5 \\ a_1 + 2d + a_1 + 3d = 5/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = 7/5 \\ 2a_1 + 5d = 5/5 \end{cases} \Rightarrow 4d = -2 \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

۹۹۴. **گزینه ۱** جمله عمومی داده شده، اگر به جای n یک بگذاریم

جمله اول و اگر دو بگذاریم جمله دوم و الی آخر به دست می‌آید.

$$a_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow 24 = \frac{n}{2}\left[2\left(\frac{1}{6}\right) + (n-1)\frac{1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow 48 = n\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}\right] \Rightarrow 48 = n\left(\frac{1}{3}n\right)$$

$$\Rightarrow n^2 = 3 \times 48 = 144 \Rightarrow n = \pm 12$$

چون تعداد جملات منفی نمی‌شود، بنابراین -12 غیر قابل قبول است.

۹۹۵. **گزینه ۴** دقت! در این سؤال نیز باید دو موضوع متفاوت را

درک کنید و یکی نگیرید: صورت سؤال دنباله‌ای عددی را داده است که جملات آن «مجموع جملات» است. پس حواسمان باید باشد که نباید از

روش معمول استفاده کنیم. در دنباله حسابی داریم:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + a_2 \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

بنابراین جملات دنباله حسابی به صورت مقابل خواهند بود: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}\left[2\left(\frac{1}{2}\right) + (5-1)\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= 2\left[1 - \frac{3}{4}\right] = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

۹۹۶. **گزینه ۲** داریم $S_5 = 55$ و $d = 4$ ، آنگاه $a_1 = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow 55 = \frac{5}{2}[2a_1 + (5-1)(4)] \Rightarrow 11 = a_1 + 8 \Rightarrow a_1 = 3$$

۹۹۷. **گزینه ۴** می‌توان صورت سؤال را به این صورت بازنویسی

کرد که مجموع ۴ جمله اول دنباله ۴۰ و مجموع ۷ جمله اول آن $40 + 51 = 91$ است. حال با داشتن $S_4 = 40$ و $S_7 = 91$ و تشکیل یک

$$\begin{cases} 40 = \frac{4}{2}(2a + 3d) \\ 91 = \frac{7}{2}(2a + 6d) \end{cases}$$

دستگاه، a_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 20 = 2a + 3d \\ 26 = 2a + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -40 = -4a - 6d \\ 26 = 2a + 6d \end{cases} \Rightarrow a = 7$$

۹۹۸. **گزینه ۱** اگر مجموع سه جمله اول را از مجموع چهار جمله

اول کم کنیم، آنچه باقی می‌ماند جمله چهارم خواهد بود:

$$a_4 = S_4 - S_3 = \frac{4}{2}(1+3(4)) - \frac{3}{2}(1+3(3))$$

$$= 2 \times 13 - \frac{3}{2} \times 10 = 26 - 15 = 11$$

پس اعداد به دست آمده، اعداد دنباله هندسی با نسبت مشترک $1/2$ هستند.
 $a_8 = a_1 r^7 \Rightarrow a_8 = 1000 \times (1/2)^7 = 2073/6$

۱۰۱۴. **گزینه ۳** **دقتا دقتا** این از آن بخش‌هایی است که ممکن است اشتباه کنید. سؤال به شما گفته است مجموع جمله دوم و سوم؛ نگفته است مجموع سه جمله اول، پس نمی‌توانید از S_n استفاده کنید.

$$\begin{aligned} a_p + a_q &= 6a_1 \Rightarrow a_1 r^p + a_1 r^q = 6a_1 \Rightarrow a_1(r^p + r^q) = 6a_1 \\ \Rightarrow r + r^2 &= 6 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \\ \Rightarrow (r+3)(r-2) &= 0 \Rightarrow r = -3 \text{ یا } r = 2 \end{aligned}$$

۱۰۱۵. **گزینه ۳**
 $a_1 + a_3 = 1/5(a_1 + a_3)$
 $\Rightarrow a + ar^2 = 1/5(ar + ar^3) \Rightarrow a(1+r^2) = 1/5 ar(1+r^2)$
 $\Rightarrow 1 = 1/5 r \Rightarrow 1 = \frac{r}{5} \Rightarrow r = \frac{5}{1} = 5$

۱۰۱۶. **گزینه ۱** چرا با وجود اینکه صورت سؤال گفته است مجموع جملات از فرمول مجموع استفاده نکردیم؟ به این دلیل که مجموع جملات همیشه، مجموع چند جمله از اول است که برای مجموع جملات اول و دوم که در صورت سؤال گفته است می‌توان نوشت ولی برای مجموع جملات سوم و چهارم نمی‌شود از آن فرمول استفاده کرد؛ چرا که مجموع n جمله اول نیست و از وسط جملات شروع شده است. پس به جای آن خود جملات را می‌نویسیم و بعد باز می‌کنیم و چون «دو معادله دو مجهولی» داریم از طریق دستگاه حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a_1 + a_1 r = \frac{9}{4} \Rightarrow a_1(1+r) = \frac{9}{4} \\ a_4 + a_8 = 36 \Rightarrow a_1 r^3 + a_1 r^7 = 36 \Rightarrow a_1 r^3(1+r^4) = 36 \end{cases}$$

$$\frac{a_1(1+r)}{a_1 r^3(1+r^4)} = \frac{\frac{9}{4}}{36} \Rightarrow \frac{1+r}{r^3(1+r^4)} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{16} \Rightarrow r^3 = 16 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1(1+2) = \frac{9}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_3 = a_1 r^2 = \frac{3}{2} (2)^2 = 6$$

۱۰۱۷. **گزینه ۱** همین نوع سؤال را در دنباله‌های حسابی عیناً جواب دادیم. روش همان است، جملات فارسی را به ریاضی تبدیل می‌کنیم.

$$a_1, a_2, a_3 = a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r = 20 \Rightarrow a_1(1+r) = 20 \\ a_1 r^2 + a_1 r^3 = 45 \Rightarrow a_1 r^2(1+r) = 45 \end{cases}$$

$$\frac{a_1(1+r)}{a_1 r^2(1+r)} = \frac{20}{45} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r = \pm \frac{3}{2}$$

چون در صورت سؤال گفته است که جملات مثبت هستند پس نسبت مشترک منفی نیست. ابتدا جمله اول را به دست می‌آوریم:

$$a_1(1+r) = 20 \Rightarrow a_1(1 + \frac{3}{2}) = 20 \Rightarrow \frac{5}{2} a_1 = 20 \Rightarrow a_1 = 8$$

بنابراین بزرگ‌ترین عدد (جمله چهارم) برابر $a_4 = a_1 r^3 = 8 \times (\frac{3}{2})^3 = 27$ است.

۱۰۱۸. **گزینه ۲** **یک سؤال ترکیبی از دنباله مسابی و هندسی**؛ در این تیپ سؤال‌ها باید بتوانید مطالب را به زبان ریاضی تبدیل کنید تا موضوع برای شما جا بیفتد. به دقت نوع تبدیل زبان غیر ریاضی به ریاضی را در

متن زیر دنبال کنید: $4, x, y \Rightarrow \frac{x}{4} = r$ هندسی

(هر جمله تقسیم بر جمله قبلی خود می‌شود نسبت مشترک دنباله هندسی)

$$3, x, y \Rightarrow x - 3 = d$$

(هر جمله منهای جمله قبلی خود می‌شود اختلاف مشترک دنباله حسابی)

۱۰۰۵. **گزینه ۲** ابتدا «جمله دوم ۸ برابر جمله پنجم است» را به زبان ریاضی می‌نویسیم و سپس ساده می‌کنیم، پاسخ سؤال به دست می‌آید.

$$a_2 = 8a_5 \Rightarrow a_1 r = 8a_1 r^4 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

۱۰۰۶. **گزینه ۲** نسبت جملات متوالی، همان نسبت مشترک است.

$$a_2 = 27a_5 \Rightarrow a_1 r = 27a_1 r^4 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

۱۰۰۷. **گزینه ۴** چند برابر بودن را از کجا می‌فهمیم؟ از آن‌جا که جمله بزرگ‌تر را بر جمله کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{a_9}{a_1} = ? \Rightarrow \frac{a_1 r^8}{a_1} = ? \Rightarrow r^8 = ?$$

پس اگر r را به دست آوریم جواب سؤال در می‌آید. r را از داده‌های مسئله به دست می‌آوریم: $a_3 = 2a_1 \Rightarrow a_1 r^2 = 2a_1 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$ حال نسبت جمله نهم به جمله اول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_9}{a_1} = r^8 = (\pm\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$$

۱۰۰۸. **گزینه ۲** **یک نکته مشاوره‌ای مهم**؛ روش‌های حل در دنباله حسابی و دنباله هندسی بسیار شبیه هم هستند. یکی را یاد بگیرید، حل سؤال‌ها ساده‌تر خواهد شد. به طور مثال هر وقت در صورت سؤال دیدید که دو جمله داده‌اند، جمله بعدی را می‌خواهند باید یکی از جملات دنباله را برحسب دیگری بنویسید، اگر این یادتان باشد؛ کلید اصلی حل سؤال را در دست دارید.

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{192}{24} = r^3 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

حال که نسبت مشترک را داریم می‌توانیم a_1 را به دست آوریم.

$$a_4 = a_1 r^3 \Rightarrow 24 = a_1 (2)^3 \Rightarrow 24 = a_1 (8) \Rightarrow a_1 = \frac{24}{8} = 3$$

۱۰۰۹. **گزینه ۲** وقتی رابطه دو جمله از دنباله را بدهند، می‌شود همه چیز را به دست آورد. فقط باید جملات را بر حسب یک جمله باز کنیم تا ساده شوند.

$$a_5 = 8a_8 \Rightarrow a_1 r^4 = 8a_1 r^7 \Rightarrow 1 = 8r^3 \Rightarrow \frac{1}{8} = r^3 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 4 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

۱۰۱۰. **گزینه ۲** روابط گفته شده را به زبان ریاضی تبدیل می‌کنیم و سپس آن‌ها را بر حسب جمله اول باز می‌کنیم.

$$a_5 - a_3 = \frac{1}{33} \Rightarrow ar^4 - ar^2 = \frac{1}{33}$$

$$\Rightarrow a \times \frac{1}{16} - a \times \frac{1}{4} = \frac{1}{33} \Rightarrow \frac{-3}{16} a = \frac{1}{33} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

۱۰۱۱. **گزینه ۱**
 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{ar^4}{ar^2} = 2 \Rightarrow r^2 = 2$

$$a_9 = ar^8 = ar^4 r^4 = a_5 r^4 = a_5 (r^2)^2 = 4 \times (2)^2 = 4 \times 4 = 16$$

۱۰۱۲. **گزینه ۱**

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{16}{9} = \frac{16}{9 \times 6} \Rightarrow \frac{ar^4}{ar} = \frac{8}{27} \Rightarrow r^3 = (\frac{2}{3})^3 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

۱۰۱۳. **گزینه ۳**

روز اول $1000 \xrightarrow{20\% \text{ اضافه شود}} 1000 + \frac{20}{100} \times 1000 = 1200$ **میزان افزایش**

روز دوم $1200 \xrightarrow{20\% \text{ اضافه شود}} 1200 + \frac{20}{100} \times 1200 = 1440$ **روز سوم**

$$1000, 1200, 1440, \dots \Rightarrow \frac{1200}{1000} = 1/2, \frac{1440}{1200} = 1/2$$

۱۰۲۵. **گزینه ۱** مجهول مسئله چیست؟ نسبت مشترک! معلوم مسئله چیست؟ $S_3 = 7a_1$. همیشه معلوم را نوشته و باز می‌کنیم تا ببینیم چه روی می‌دهد:

$$S_3 = 7a_1 \Rightarrow a_1 + a_1r + a_1r^2 = 7a_1$$

$$\Rightarrow a_1(1+r+r^2) = 7a_1 \Rightarrow 1+r+r^2 = 7$$

$$\Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r-2)(r+3) = 0 \Rightarrow r = 2, -3$$

۱۰۲۶. **گزینه ۳** مجموع شش جمله اول را خواسته پس فرمول S_n را می‌نویسیم و به جای n عدد شش را جایگذاری می‌کنیم. نسبت مشترک را

نیز از تقسیم جمله دوم بر اول به دست می‌آوریم:

$$r = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

اکنون با جایگذاری معلومات در رابطه مجموع جملات خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{32((\frac{1}{2})^6 - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{32(\frac{1}{64} - 1)}{-\frac{1}{2}} = -2 \times 32(\frac{1}{64} - 1)$$

$$= -64(\frac{1}{64} - 1) = (-64 + 64) = -1 + 64 = 63$$

۱۰۲۷. **گزینه ۳** $a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^8 - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{255}{256}$$

۱۰۲۸. **گزینه ۱** **سؤال ترکیبی از مجموع جملات و شرط دنباله هندسی:** شرط دنباله هندسی را نوشته و جایگذاری می‌کنیم:

$$b^2 = ac \Rightarrow (x-2)(x+4) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = x^2 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین سه جمله ما به صورت ۲، ۴، ۸ خواهند آمد که $a_1 = 2$ و $r = 2$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1) = 254$$

است.

۱۰۲۹. **گزینه ۲** برای به دست آوردن مجموع هشت جمله چه چیزهایی لازم داریم؟ نسبت مشترک و جمله اول. مرحله اول: دو جمله از دنباله را داده که می‌توانیم نسبت مشترک را به دست آوریم. مرحله دوم: چون یک جمله را داریم و نسبت مشترک را نیز داریم، می‌توانیم جمله اول را به دست آوریم. مرحله سوم: مجموع هشت جمله را به دست می‌آوریم.

مرحله اول: به دست آوردن نسبت مشترک:

$$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \Rightarrow r^2 = \frac{a_5}{a_3}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{a_3 r^2}{a_3} \Rightarrow r^2 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

مرحله دوم: به دست آوردن جمله اول:

$$a_3 = 2 \Rightarrow a_1 r^2 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مرحله سوم: به دست آوردن S_8

$$S_8 = \frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2}(256 - 1)}{2 - 1} = 127.5$$

اگر جواب به دست آمده در گزینه‌ها نبود، r را برابر -2 قرار می‌دهیم و دوباره مجموع را حساب می‌کنیم.

۱۰۳۰. **گزینه ۳** جمله اول در صورت سؤال دقیقاً تعریف نسبت مشترک است. پس نسبت مشترک $\frac{2}{3}$ است. ادامه جمله صورت سؤال را در فرمول مجموع n جمله اول جایگذاری می‌کنیم:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow \frac{211}{27} = \frac{a_1((\frac{2}{3})^n - 1)}{\frac{2}{3} - 1} \Rightarrow \frac{211}{27}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = r \\ x - 3 = d \end{cases} \xrightarrow{d=2r} \begin{cases} x = 4r \\ x - 3 = 2r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4r \\ x = 2r + 3 \end{cases} \Rightarrow 2r + 3 = 4r \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 3$$

۱۰۱۹. **گزینه ۳** ابتدا سه جمله اول تا سوم را نوشته و باز می‌کنیم، اگر سه جمله را a, ar, ar^2 در نظر بگیریم و گفته‌های صورت سؤال را به زبان ریاضی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = 216 \Rightarrow a^3 r^3 = 216 \Rightarrow \sqrt[3]{a^3 r^3} = \sqrt[3]{216}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(ar)^3} = \sqrt[3]{(2 \times 3)^3} \Rightarrow ar = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{r}$$

$$a + ar + ar^2 = 26 \xrightarrow{a = \frac{6}{r}} \frac{6}{r} + 6 + 6r = 26$$

$$\Rightarrow 6 + 6r + 6r^2 = 26r \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \Rightarrow r = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow r = 3, \frac{1}{3}$$

که در گزینه‌ها موجود است.

۱۰۲۰. **گزینه ۴** با توجه به این که در دنباله هندسی حاصل ضرب جملات کناری برابر مربع جمله وسط است داریم:

$$y^2 = (y-x+2)(y+x-2)$$

$$= [y - (x-2)][y + (x-2)] \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} y^2 - (x-2)^2$$

$$y^2 = y^2 - (x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 = y^2 - y^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری } x=2} y, y, y$$

جملات تبدیل می‌شوند به y, y, y که از این‌جا نسبت مشترک برابر ۱ می‌شود.

۱۰۲۱. **گزینه ۲** اگر x واسطه هندسی بین a و b باشد، $x^2 = ab$ یا $x = \pm\sqrt{ab}$ است، بنابراین واسطه هندسی در اینجا برابر $\pm\sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{8}$ است که در گزینه‌ها موجود است.

۱۰۲۲. **گزینه ۲** در هر قطعه از یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات کناری برابر مربع جمله وسط است. در این مسأله نیز b وسط a و c قرار دارد. پس $b^2 = ac$ ، از طرفی b وسط $\frac{5}{12}$ و $\frac{5}{13}$ نیز قرار دارد. پس $b^2 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{12}$ که از این‌جا $b = \frac{5}{6}$ خواهد شد.

۱۰۲۳. **گزینه ۳** می‌دانیم واسطه هندسی دو عدد برابر ریشه دوم حاصل ضرب آن دو عدد است و در معادله استاندارد درجه دوم حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\pm\sqrt{x'x''} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

۱۰۲۴. **گزینه ۴** اگر a, b, c و جملات متوالی دنباله هندسی باشند، $abc = 1$ و $b+c = 8$. الان باید کاری کنیم که تعداد متغیرها کم شود. در واقع تعداد متغیرها به یک مورد تقلیل یابد که بتوانیم سؤال را حل کنیم. با توجه به اینکه b و c جملات دوم و سوم هستند، $b = ar$ و $c = ar^2$ که از جایگذاری داریم:

$$abc = 1 \Rightarrow a \times ar \times ar^2 = 1 \Rightarrow a^3 r^3 = 1 \Rightarrow ar = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$b + c = 8 \xrightarrow{b=1} c = 7$$

قدم بعدی:

$$b + c = 8 \Rightarrow ar + ar^2 = 8$$

$$\Rightarrow ar(1+r) = 8 \xrightarrow{ar=b=1} 1+r = 8 \Rightarrow r = 7$$

$$b = ar \Rightarrow 1 = a \times 7 \Rightarrow a = \frac{1}{7}$$

$$a + b + c = \frac{1}{7} + 1 + 7 = \frac{57}{7}$$

قدم آخر:

۱۰۳۷. **گزینه ۲** اگر مقدار اجرت کارگر را در هر روز محاسبه کنیم، خواهیم یافت که این مقادیر تشکیل یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ می دهند پس مجموع اجرت ۶ روز برابر است با مجموع ۶ جمله از یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{3}{5}$ و جمله اول ۶۴۰ که برابر است با:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \Rightarrow S_6 = 640 \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6 - 1}{\frac{3}{5} - 1} = 640 \cdot \frac{729 - 1}{\frac{2}{5}} = 13300$$

۱۰۳۸. **گزینه ۲** ابتدا باید این مسأله را حل کرد: «مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و جمله آخر ۸۱ برابر ۱۲۱ است، نسبت مشترک این دنباله کدام است؟» که با ساده کردن فرمول و جایگذاری داریم:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 r^{n-1} \times r - a_1}{r - 1} = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$\Rightarrow 121 = \frac{81r - 1}{r - 1} \Rightarrow 121r - 121 = 81r - 1$$

$$\Rightarrow 121r - 81r = -1 + 121 \Rightarrow 40r = 120 \Rightarrow r = \frac{120}{40} = 3$$

اکنون تعداد جملات را حساب می کنیم: $a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 81 = 1 \times 3^{n-1}$
 $\Rightarrow 3^4 = 3^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$
 مجموعاً ۵ جمله است، بنابراین باید ۳ جمله درج کنیم.

۱۰۳۹. **گزینه ۱** $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3$
 یادتان ماند هر عدد فقط یک ریشه فرد دارد.

۱۰۴۰. **گزینه ۱** عدد مورد نظر را x می گیریم.
 $\sqrt[5]{x} = -2 \Rightarrow x = (-2)^5 = -32$

۱۰۴۱. **گزینه ۳** ریشه چهارم مثبت $\sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \frac{5}{100} = 0.05$

$\sqrt[4]{\frac{5^4}{10^4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{10}\right)^4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$

0.001 ریشه سوم $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{1}{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{1}{10} = 0.1$

مجموع $\rightarrow 0.5 + 0.1 = 0.6$

۱۰۴۲. **گزینه ۴** $A = \pm \sqrt[4]{10^{-4}} = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{10^4}} = \pm \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{10^4}} = \pm \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \frac{A^2}{10} = \frac{A \pm \frac{1}{10}}{10} \Rightarrow \frac{(\pm \frac{1}{10})^2}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$

۱۰۴۳. **گزینه ۳** مجموع ریشه های زوج هر عددی برابر صفر است.
 0.00000001 ریشه های هشتم $\pm \sqrt[8]{0.00000001} = \pm \sqrt[8]{10^{-8}}$

$= \pm \sqrt[8]{\frac{1}{10^8}} = \pm \frac{1}{10} \Rightarrow$ ریشه ها $\frac{+1}{10}, \frac{-1}{10}$ مجموع $\rightarrow \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0$

۱۰۴۴. **گزینه ۲** ریشه سوم $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ یعنی $\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}$

برای حل مسائل مربوط به «رادیکال های مرکب» به خاطر داشته باشید که همیشه باید این رادیکال ها را ادغام کرد؛ به این صورت که عدد را به تدریج به داخلی ترین رادیکال انتقال داد. هر بار عددی خواهد داخل یک رادیکال شود، به توان فرجه آن رادیکال می رسد. در آخر نیز همه فرجه ها را در هم ضرب می کنیم تا فرجه نهایی به دست آید. با توجه به این توضیحات خواهیم داشت:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times 2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}}$$

$$= \sqrt[3]{2^3} = 2^1 = 2 = \sqrt{2}$$

$$= \frac{a_1 \left(\frac{22}{243} - 1\right)}{-\frac{1}{3}} = \frac{221}{27} = \frac{a_1 \left(-\frac{211}{243}\right)}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{221}{27} = a_1 \frac{211}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{221}{27} = a_1 \frac{3 \times 211}{243} \Rightarrow \frac{1}{27} = \frac{a_1}{81} \Rightarrow 27a_1 = 81 \Rightarrow a_1 = 3$$

۱۰۳۱. **گزینه ۲** کافی است فرمول مجموع جملات را بنویسیم و جایگذاری کنیم، چون تمام داده های ممکن برای پیدا کردن جمله اول که لازمه یافتن جمله پنجم است را داریم.

$$r = \frac{1}{3}, S_8 = 63 \frac{3}{4}, a_1 = ?$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow 63 \frac{3}{4} = \frac{a_1 \left(\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} \Rightarrow \frac{(63 \times 4) + 3}{4}$$

$$= \frac{a_1 \left(\frac{1}{246} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{255}{4} = \frac{a_1 \left(-\frac{255}{246}\right)}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{255}{4} = \frac{255 \times 2 \times a_1}{246}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a_1}{128} \Rightarrow 4a_1 = 128 \Rightarrow a_1 = \frac{128}{4} = 32$$

سؤال، جمله پنجم را می خواهد.

$$a_5 = a_1 r^4 \Rightarrow a_5 = 32 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 32 \times \frac{1}{81} = \frac{32}{81}$$

۱۰۳۲. **گزینه ۳** از این سؤال یک نکته مهم یاد بگیرد: اگر عدد منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی خواهد بود، بنابراین اگر بدانیم n عددی فرد است حاصل $(-1)^n = -1$ است. اکنون به حل مسئله می پردازیم:

$$S_n = a_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 6 \times \frac{(-1)^n - 1}{-1 - 1} = 6 \times \frac{-1 - 1}{-1 - 1} = 6$$

۱۰۳۳. **گزینه ۱** فرمول مجموع را می نویسیم و ساده می کنیم تا مجموع جملات فقط برحسب a_1 شود:

$$S_3 = a_1 \times \frac{r^3 - 1}{r - 1} = a_1 \times \frac{(-4)^3 - 1}{-4 - 1}$$

$$= a_1 \times \frac{-64 - 1}{-5} = a_1 \times \frac{-65}{-5} = 13a_1$$

$$S_4 = 5S_3 \Rightarrow \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{5a(r^3 - 1)}{r - 1}$$

$$\Rightarrow (r^4 - 1) = 5(r^3 - 1) \Rightarrow (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 5(r^2 - 1)$$

$$\Rightarrow r^2 + 1 = 5 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

۱۰۳۵. **گزینه ۴** به طور کلی چه در دنباله حسابی و چه در دنباله هندسی: $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$
 پس در واقع مجهول a_{n+1} است که در دنباله هندسی $a_{n+1} = ar^n$

۱۰۳۶. **گزینه ۱** از کجا بهمیم که این سؤال، اشاره به دنباله هندسی دارد؟ اولین نکته اینکه آیا اساساً دنباله هست و سپس چه نوع دنباله ای؟ چون دستمزد هر روز $\frac{1}{5}$ برابر دستمزد روز قبل است. پس دنباله هست؛ از طرفی چون هر روز $\frac{1}{5}$ برابر روز قبل است یعنی ضرب در عدد معینی می شود پس دنباله هندسی است.

پس می توان گفت دستمزد این کارگر در طی هفته تشکیل یک دنباله هندسی ۶ جمله ای با $a_1 = 320$ و $r = \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ می دهد و مجموع دستمزد ۶ روز اول، جمع ۶ جمله اول دنباله است که از جایگذاری در فرمول خواهیم داشت:

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{320 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^6 - 1\right)}{\frac{3}{5} - 1}$$

$$= \frac{320 \cdot \left(\frac{729}{64} - 1\right)}{\frac{3}{5} - 1} = \frac{320 \cdot \left(\frac{665}{64}\right)}{\frac{3}{5} - 1} = \frac{5 \times 665}{\frac{1}{5}} = 6650$$

$$= \frac{320 \cdot \left(\frac{729}{64} - 1\right)}{\frac{3}{5} - 1} = \frac{320 \cdot \left(\frac{665}{64}\right)}{\frac{3}{5} - 1} = \frac{5 \times 665}{\frac{1}{5}} = 6650$$