# فصل ۱

## قسمت دوم
## بخش‌پذیری در اعداد صحیح

### بخش‌پذیری

تقسیم، ابزاری است برای قرار دادن تعدادی شیء، در دسته‌های مساوی. چه بهتر که در دسته‌بندی ما باقی‌مانده‌ای وجود نداشته باشد.
مثلاً $۵ \times ۲ = ۱۰$ یعنی ۱۰ شیء را می‌توان به ۵ دستهٔ دوتایی تقسیم کرد (۱۰ بر ۲ بخش‌پذیر است). این تقسیم‌بندی را می‌توان به این شکل نگاه کرد که: ۱۰ شیء را می‌توان در ۵ دستهٔ دوتایی شمرد، به بیان دیگر می‌گوییم عدد ۲، عدد ۱۰ را می‌شمارد.

**تعریف** عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش‌پذیر گوییم، هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که: $a = bq$

بخش‌پذیری a بر b را می‌توان به‌صورت $b \mid a$ نشان داد و به یکی از صورت‌های زیر خواند:
۱) عدد b، عدد a را می‌شمارد (عاد می‌کند).
۲) a بر b بخش‌پذیر است ( a مضرب b است یا b مقسوم‌علیه a است).

**تذکر** در تمام مباحث نظریهٔ اعداد، با اعداد صحیح کار می‌کنیم و همواره منظور از عدد، عدد صحیح است.

**تذکر** اگر عدد b، عدد a را عاد نکند ( a بر b بخش‌پذیر نباشد)، می‌نویسیم $b \nmid a$

**تست**
کدام گزینه صحیح نیست؟
۱) $۷ \mid ۴۲$ ۲) $۶ \mid ۷۲$ ۳) $۱۴ \mid ۷$ ۴) $۷ \mid ۹۱$

**پاسخ:** بررسی گزینه‌ها:
۱) $۴۲ = \underbrace{۶}_{q} \times ۷ \Rightarrow ۷ \mid ۴۲$ ✓
۲) $۷۲ = ۶ \times \underbrace{۱۲}_{q} \Rightarrow ۶ \mid ۷۲$ ✓
۳) ۱۴ مقسوم‌علیه ۷ نیست و این رابطه نادرست است
۴) $۹۱ = ۷ \times \underbrace{۱۳}_{q} \Rightarrow ۷ \mid ۹۱$ ✓
پس جواب گزینهٔ (۳) است.

**تست**
به ازای چند عدد طبیعی n، داریم $۶ \mid n - ۲$؟
۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

**پاسخ:** برای آن‌که $۶ \mid n - ۲$، باید $n - ۲$ مقسوم‌علیه ۶ باشد. یعنی:

| $n-۲$ | $-۱$ | $۱$ | $-۲$ | $۲$ | $-۳$ | $۳$ | $-۶$ | $۶$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | ۱ | ۳ | ۰ | ۴ | $-۱$ | ۵ | $-۴$ | ۸ |

+۲

در نتیجه برای n، ۵ مقدار طبیعی $\{۱، ۳، ۴، ۵، ۸\}$ وجود دارد و جواب گزینهٔ (۲) است.

**تست**
اگر $ac = bd$ باشد، کدام گزینه درست است؟
۱) $a \mid c$ ۲) $a \mid b$ ۳) $ac \mid b$ ۴) $a \mid bd$

**پاسخ:** در تساوی $ac = bd$ اگر فرض کنیم $c = q$، در این‌صورت داریم:
$bd = a \times q \Rightarrow a \mid bd$
پس جواب گزینهٔ (۴) است. اما برای رد سایر گزینه‌ها تساوی $\underbrace{۲}_{a} \times \underbrace{۳}_{c} = \underbrace{۱}_{b} \times \underbrace{۶}_{d}$ را در نظر بگیرید:
رد گزینهٔ (۱): $۲ \nmid ۳ \Rightarrow a \nmid c$ ، رد گزینهٔ (۲): $۲ \nmid ۱ \Rightarrow a \nmid b$ ، رد گزینهٔ (۳): $۶ \nmid ۱ \Rightarrow ac \nmid b$

## ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

**ویژگی (۱):** عدد صفر، هیچ عددی را نمی‌شمارد، جز خودش. به عبارت دیگر: $\circ \mid a \Rightarrow a=\circ$

**توجه** هر عددی صفر را عاد می‌کند: $(\forall a\in \mathbb{Z}) : a \mid \circ$

**ویژگی (۲):** هر عددی خودش را می‌شمارد. یعنی: $\forall a\in \mathbb{Z} : a\mid a$

**ویژگی (۳):** اعداد ۱ و ۱− هر عددی را می‌شمارند. یعنی: $\forall a\in \mathbb{Z} : \pm ۱ \mid a$

**ویژگی (۴):** اگر عددی ۱ یا ۱− را بشمارد، آن‌گاه آن عدد برابر با ۱± است، یعنی: $a\mid -۱ \Rightarrow a=\pm ۱$ یا $a\mid ۱ \Rightarrow a=\pm ۱$

**ویژگی (۵):** $\circ \mid \circ$

**تست** منحنی به معادلهٔ $y=\dfrac{-۱}{۵-۲x}$ از چند نقطه با مختصات صحیح (طول و عرض صحیح) می‌گذرد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

**پاسخ:** برای این‌که $y\in\mathbb{Z}$ باشد، باید $\dfrac{-۱}{۵-۲x}\in\mathbb{Z}$ باشد و به عبارت دیگر $۵-۲x \mid -۱$ (برای آن‌که حاصل یک کسر عددی صحیح شود، باید صورت آن بر مخرجش بخش‌پذیر باشد.) پس داریم:

$$۵-۲x\mid -۱ \Rightarrow \begin{cases} ۵-۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=-۱ \\ ۵-۲x=-۱ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۱ \end{cases}$$

پس این منحنی از دو نقطهٔ $(۲,-۱)$ و $(۳,۱)$ عبور می‌کند. پس جواب گزینهٔ (۲) است.

**ویژگی (۵):** هر یک از طرفین رابطهٔ عاد کردن را می‌توان در یک منفی ضرب کرد. یعنی:

$$a\mid b \Rightarrow \begin{cases} a\mid -b \\ -a\mid b \\ -a\mid -b \end{cases}$$

**ویژگی (۶):** سمت راست رابطهٔ عاد کردن را در هر عددی می‌توان ضرب کرد (یا به توان هر عدد طبیعی رساند). یعنی:

$$a\mid b \Rightarrow \begin{cases} a\mid b^m & (m\in\mathbb{N}) \\ a\mid mb & (m\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

**تذکر** عکس رابطهٔ فوق لزوماً برقرار نیست. برای مثال: $۴\mid ۲^۳ \xrightarrow{\text{اما}} ۴\nmid ۲$ ، $۲\mid ۴\times ۳ \xrightarrow{\text{اما}} ۲\nmid ۳$

**اثبات ۶:**

$$a\mid b \Rightarrow b=aq \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{به توان } m} b^m=a^mq^m=a\underbrace{(a^{m-۱}q^m)}_{q'} \Rightarrow b^m=aq' \Rightarrow a\mid b^m \\ \xrightarrow{\text{ضرب در } m} mb=maq=a\underbrace{(mq)}_{q'} \Rightarrow mb=aq' \Rightarrow a\mid mb \end{cases}$$

**ویژگی (۷):** طرفین رابطهٔ عاد کردن را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به هر توانی رساند و بالعکس، یعنی:

$a\mid b \Leftrightarrow a^n\mid b^n \quad (n\in\mathbb{N})$ $\qquad$ $a\mid b\Leftrightarrow ma\mid mb \quad (m\in\mathbb{Z})$

**اثبات ۷:**

$$a\mid b\Rightarrow b=aq\Rightarrow \begin{cases} b^n=a^n\underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow a^n\mid b^n \\ mb=maq \Rightarrow ma\mid mb \end{cases}$$

**نتیجهٔ ۱:** $\left.\begin{matrix} a\mid b \\ n\le m \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^n\mid b^m$

**مثال:** $۲\mid ۶ \xrightarrow{۳>۲} ۲^۲\mid ۶^۳$

**اثبات نتیجهٔ ۱:**

$$a\mid b\Rightarrow b=aq \xrightarrow{\text{طرفین به توان } m} b^m=a^mq^m=a^n.\underbrace{a^{m-n}.q^m}_{q'} \Rightarrow a^n\mid b^m$$

**نتیجهٔ ۲:** $\left.\begin{matrix} a^n\mid b^m \\ n\ge m \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\mid b$

**مثال:** $\underbrace{۵۷۶}_{۲۴^۲}=\underbrace{۶۴}_{۴^۳}\times ۹ \Rightarrow ۴^۳\mid ۲۴^۲ \xrightarrow{۳>۲} ۴\mid ۲۴$

**اثبات نتیجهٔ ۲:**

$$a^n \mid b^m \xrightarrow{s=n-m} a^{m+s} \mid b^m \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } b^s} a^{m+s} \mid b^{m+s} \Rightarrow a \mid b$$

**نتیجهٔ ۳:** $\left.\begin{array}{l} a^n \mid b^m \\ \frac{m}{n} \le \frac{q}{p} \;\text{ یا }\; mp \le nq \end{array}\right\} \Rightarrow a^p \mid b^q$

مثال : $\underbrace{۱۲^۵}_{۲^{۱۰}\times ۳^۵} \mid \underbrace{۱۸^{۱۰}}_{۲^{۱۰}\times ۳^{۲۰}} \Rightarrow \underbrace{۱۲^۳}_{۲^۶\times ۳^۳} \mid \underbrace{۱۸^۷}_{۲^۷\times ۳^{۱۴}}$ (چراکه $\frac{۱۰}{۵} < \frac{۷}{۳}$)

**اثبات نتیجهٔ ۳:**

$$mp \le nq \Rightarrow ۰ \le \overbrace{nq - mp}^{t} \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}} nq - mp = t \Rightarrow mp = nq - t \quad (t \ge ۰ \text{ که})$$

طبق فرض : $a^n \mid b^m \xrightarrow{\text{به توان } p} a^{np} \mid b^{mp} \xrightarrow{mp=nq-t} a^{np} \mid b^{nq-t} \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } b^t} a^{np} \mid b^{nq} \Rightarrow a^p \mid b^q$

**نتیجهٔ ۴:** $\forall m,n \;\; ; \;\; m \ge n \Rightarrow a^n \mid a^m$

**اثبات نتیجهٔ ۴:**

$$m \ge n \Rightarrow a^m = a^n \times \underbrace{a^{m-n}}_{q} \Rightarrow a^n \mid a^m$$

---

**تست**

**از رابطهٔ $a^۵ \mid b^۷$ کدام رابطه را همواره می‌توان نتیجه گرفت؟**

۱) $a \mid b$    ۲) $a^۳ \mid b^۲$    ۳) $a^۲ \mid b$    ۴) $a^۲ \mid b^۳$

**پاسخ : روش اول:** طبق نتیجهٔ ۳ در رابطهٔ بالا زمانی می‌توان از رابطهٔ $a^n \mid b^m$، رابطهٔ $a^p \mid b^q$ را نتیجه گرفت که $mp \le nq$ باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} a^۵ \mid b^۷ \\ ۵\times ۳ \ge ۷ \times ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲ \mid b^۳$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

**روش دوم:**

$$a^۵ \mid b^۷ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} a^{۱۰} \mid b^{۱۴} \xrightarrow{\text{سمت راست را در } b \text{ ضرب می‌کنیم.}} a^{۱۰} \mid b^{۱۵}$$

پس می‌توانیم بگوییم $(a^۲)^۵ \mid (b^۳)^۵$ و با توجه به ویژگی ۷ داریم: $a^۲ \mid b^۳$

---

**تست**

**کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نادرست است؟**

۱) $a^۳ \mid b^۳ \Rightarrow a \mid ۳b$    ۲) $a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a \mid ۲b$    ۳) $a \mid b \Rightarrow ۲a \mid ۴b$    ۴) $a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow ۲a \mid b$

**پاسخ :** طبق ویژگی‌های عاد کردن درستی هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۲) : $a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a \mid b \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{\text{سمت راست}} a \mid ۲b$ ✓ ، گزینهٔ (۱) : $a^۳ \mid b^۳ \Rightarrow a \mid b \xrightarrow[\text{ضرب در ۳}]{\text{سمت راست}} a \mid ۳b$ ✓

گزینهٔ (۳) : $a \mid b \Rightarrow ۲a \mid ۲b \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{\text{سمت راست}} ۲a \mid ۴b$ ✓

گزینهٔ (۴) نادرست است؛ برای رد آن مثال نقض ارائه می‌کنیم:

$$a = ۳, b = ۹ \Rightarrow \underbrace{۳^۲}_{۹} \mid \underbrace{۹^۲}_{۸۱} \xrightarrow{\text{اما}} \underbrace{۲\times ۳}_{۶} \nmid ۹$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

---

**ویژگی (۸):** سمت چپ رابطهٔ عاد کردن را می‌توان با مقسوم‌علیه آن جایگزین کرد. به عبارت دیگر:

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

**تذکر** عکس رابطه، لزوماً برقرار نیست. برای مثال: $\begin{cases} ۲ \mid ۴ \\ ۴ \mid ۴ \end{cases} \Rightarrow ۸ \nmid ۴$

**ویژگی (۹):** طرفین رابطهٔ عاد کردن را می‌توان در هم ضرب کرد. یعنی:

$$\begin{array}{l} a \mid b \\ c \mid d \end{array} \Rightarrow ac \mid bd$$

**تذکر** این ویژگی در رابطه با جمع، تفریق و تقسیم لزوماً صدق نمی‌کند.

**ویژگی (۱۰) (بسیار مهم):** هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل و حاصل‌ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid b+c \;\; , \;\; a \mid b-c \;\; , \;\; a \mid b\times c$$

و به طور کلی هر ترکیب خطی آن دو عدد را می‌شمارد.

$$a \mid mb \pm nc \qquad (m,n \in \mathbb{Z})$$

**نتیجه:** اگر $a \mid b$ آن‌گاه $a \mid b + na$

**تست**

**از درستی رابطهٔ $xy \mid z$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟**

۱) $x \mid z - x^4$ ۲) $y \mid z$ ۳) $x^3 \mid z^4$ ۴) $y^2 \mid z$

**پاسخ:** به جای سمت چپ رابطه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم:

$$xy \mid z \Rightarrow \begin{cases} y \mid z & \text{(درستی گزینهٔ ۲)} \\ x \mid z \xrightarrow{4>3} x^3 \mid z^4 & \text{(درستی گزینهٔ ۳)} \end{cases}$$

از طرفی هم به کمک رابطهٔ $x \mid z$ و این‌که هر عددی خودش را می‌شمارد، داریم:

$$\left.\begin{matrix} x \mid z \\ x \mid x \xrightarrow{\text{سمت راست به توان ۴}} x \mid x^4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} x \mid z - x^4 \quad \text{(درستی گزینهٔ ۱)}$$

برای رد گزینهٔ (۴)، مثال نقض زیر را ارائه می‌کنیم:

$$\underbrace{9}_{x} \times \underbrace{2}_{y} \mid \underbrace{18}_{z} \xrightarrow{\text{اما}} \underbrace{4}_{y^2} \nmid 18 \quad \text{(رد گزینهٔ ۴)}$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

**تست**

**به ازای چند عدد صحیح $a$، عدد $a$ دو عدد $5m+4$ و $4m+3$ را عاد می‌کند؟** (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

**پاسخ:** $a$ دو عدد $5m+4$ و $4m+3$ را می‌شمارد، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} a \mid 4m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} a \mid 20m+15 \\ a \mid 5m+4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۴}} a \mid 20m+16 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} a \mid -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس دو مقدار صحیح برای $a$ وجود دارد و جواب گزینهٔ (۳) است.

**توجه** در تمام مسائل به این سبک، هدف حذف متغیر از سمت راست رابطهٔ عاد کردن است، به طوری‌که در سمت راست فقط عدد باقی بماند.

**تست**

**چند عدد طبیعی مانند $n$ وجود دارد، به طوری‌که حاصل کسر $\frac{5n+17}{n-5}$ یک عدد طبیعی باشد؟**

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

**پاسخ:** برای آن‌که $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی باشد، باید:

اولاً: مثبت باشد، یعنی:

$$\frac{5n+17}{n-5} > 0 \xrightarrow{5n+17>0} n-5>0$$

ثانیاً: مخرج، صورت کسر را بشمارد، یعنی $n-5 \mid 5n+17$. پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} n-5 \mid 5n+17 \\ n-5 \mid n-5 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} n-5 \mid 5n-25 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} n-5 \mid 42$$

پس از آن‌جایی‌که $n-5>0$ است، باید $n-5$ مقسوم‌علیه مثبت ۴۲ باشد، پس داریم:

| $n-5$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۶ | ۷ | ۱۴ | ۲۱ | ۴۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | ۶ | ۷ | ۸ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۹ | ۲۶ | ۴۷ |

+۵

پس برای ۸ مقدار طبیعی $\{6,7,8,11,12,19,26,47\}$، حاصل $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی است؛ پس جواب گزینهٔ (۳) است.

**نکتهٔ مهم** در حل مسائل به‌صورت $x-a \mid f(x)$، کافی است رابطهٔ $x-a \mid f(a)$ را حل کنیم. (چرا که باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با $f(a)$)

**تست**

**به ازای چند عدد صحیح $n$، حاصل $\frac{2n^2+3n+7}{n-1}$ یک عدد صحیح است؟**

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

**پاسخ:** برای آن‌که حاصل $\frac{2n^2+3n+7}{n-1}$ عددی صحیح باشد، باید مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $n-1 \mid \underbrace{2n^2+3n+7}_{f(n)}$. ریشهٔ عبارت سمت چپ را محاسبه کرده و در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$n-1=0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow f(1)=2(1)^2+3(1)+7=12$$
$$\Rightarrow n-1 \mid 12 \Rightarrow n-1=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$$

در نتیجه به ازای هر یک از این ۱۲ مقدار، عددی صحیح برای $n$ به‌دست می‌آید. پس جواب گزینهٔ (۳) است.

**تذکر** اگر ریشهٔ عبارت سمت چپ (مقسوم‌علیه) عددی صحیح نشد، باز هم ریشه را در عبارت قرار می‌دهیم و عدد به‌دست آمده را تا حد امکان ساده می‌کنیم. حال عبارت سمت چپ باید صورت این کسر را بشمارد.

**تست**

**تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۳xy - y - ۵x = ۱۳$ در اعداد طبیعی را بیابید.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** در این‌جا ابتدا $y$ را بر حسب $x$ محاسبه می‌کنیم:

$$۳xy - y - ۵x = ۱۳ \Rightarrow y(۳x - ۱) = ۵x + ۱۳ \Rightarrow y = \frac{۵x + ۱۳}{۳x - ۱}$$

حال برای آن‌که $y$ و $x$ اعدادی طبیعی باشند، باید:

اولاً: $y$ و $x$ هر دو مثبت باشند:

$$\frac{۵x + ۱۳}{۳x - ۱} > ۰ \xrightarrow{۵x+۱۳>۰} ۳x - ۱ > ۰$$

ثانیاً: مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $۳x - ۱ \mid \underbrace{۵x + ۱۳}_{f(x)}$. حالا ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow f(\frac{۱}{۳}) = ۵(\frac{۱}{۳}) + ۱۳ = \frac{۴۴}{۳} \Rightarrow ۳x - ۱ \mid ۴۴$$

مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۴ برابر است با:

$$۳x - ۱ = \begin{cases} ۱ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \notin \mathbb{N} & \times \\ ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۹ & \checkmark \\ ۴ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \notin \mathbb{N} & \times \\ ۱۱ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۳ & \checkmark \\ ۲۲ \Rightarrow x = \frac{۲۳}{۳} \notin \mathbb{N} & \times \\ ۴۴ \Rightarrow x = ۱۵ \Rightarrow y = ۲ & \checkmark \end{cases}$$

پس (۱،۹)، (۴،۳) و (۱۵،۲) جواب‌های طبیعی هستند که برای $(x،y)$ به‌دست می‌آید. پس جواب گزینهٔ (۴) است.

**ویژگی (۱۱):** اگر عدد $a$، عدد $b$ را بشمارد و $b$ نیز $c$ را بشمارد، آن‌گاه $a$، $c$ را می‌شمارد. یعنی:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid c \qquad \text{(خاصیت تعدی)}$$

**اثبات (۱۱):**

$$\begin{matrix} a \mid b \Rightarrow b = aq \\ b \mid c \Rightarrow c = bq' \end{matrix} \xrightarrow{\text{را در عبارت پایینی جایگذاری می‌کنیم } b=aq} c = (aq)q' = a\underbrace{qq'}_{q''} \Rightarrow a \mid c$$

**تست**

**اگر $a \mid ۱۱$ و $a \mid ۷۸۰$، در این‌صورت برای $a$، چند مقدار طبیعی وجود دارد؟**

۱) ۱۲ ۲) صفر ۳) ۲۴ ۴) ۸

**پاسخ:** با توجه به رابطهٔ تعدی داریم:

$$\begin{cases} ۱۱ \mid a \\ a \mid ۷۸۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} ۱۱ \mid ۷۸۰$$

اما این رابطه هرگز برقرار نیست، پس هیچ مقداری برای $a$ وجود ندارد که هر دو رابطه برقرار باشد. پس جواب گزینهٔ (۲) است.

**تست**

**از درستی رابطهٔ $x^۲ - y^۲ \mid a - b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟**

۱) $x + y \mid a^۳ - b^۳$ ۲) $x + y \mid a^۳ + b^۳$ ۳) $x - y \mid a^۲ - b^۲$ ۴) $x - y \mid a - b$

**پاسخ:** طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$x^۲ - y^۲ = (x - y)(x + y) \Rightarrow \begin{cases} x - y \mid x^۲ - y^۲ & \text{(رابطهٔ ۱)} \\ x + y \mid x^۲ - y^۲ & \text{(رابطهٔ ۲)} \end{cases}$$

حالا از رابطهٔ $x^۲ - y^۲ \mid a - b$ (فرض مسئله) و خاصیت تعدی در رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$\left.\begin{matrix} \text{رابطهٔ ۱}: x - y \mid x^۲ - y^۲ \\ \text{فرض مسئله}: x^۲ - y^۲ \mid a - b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x - y \mid a - b \qquad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{رابطهٔ ۲}: x + y \mid x^۲ - y^۲ \\ \text{فرض مسئله}: x^۲ - y^۲ \mid a - b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x + y \mid a - b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } (a^۲ + ab + b^۲)} x + y \mid a^۳ - b^۳ \qquad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

حالا به کمک رابطهٔ گزینهٔ (۴) داریم:

$$x - y \mid a - b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } (a + b)} x - y \mid a^۲ - b^۲ \qquad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

اما برای رد گزینهٔ (۲) داریم:

$$۵ = \underbrace{۳^۲}_{x^۲} - \underbrace{۲^۲}_{y^۲} \mid \underbrace{۶}_{a} - \underbrace{۱}_{b} = ۵ \xrightarrow{\text{امّا}} ۵ = \underbrace{۳}_{x} + \underbrace{۲}_{y} \nmid \underbrace{۶^۳}_{a^۳} + \underbrace{۱^۳}_{b^۳} = ۲۱۷$$

پس جواب گزینهٔ (۲) است.

**ویژگی (۱۲):** اگر $a|b$ و $b\neq ۰$ باشد، در این‌صورت $|a|\leq|b|$ (توجه داریم که $b\neq ۰$ است چرا که اگر $b=۰$ باشد، همواره $a|b$)

**نتیجه** اگر $a|b$ و $b|a$ آن‌گاه $|a|=|b|$

**تذکر** در بخش‌پذیری لزوماً ویژگی تقارنی وجود ندارد. برای مثال $۲|۴$ ولی $۴\nmid ۲$

**تست** **به ازای چند عدد طبیعی n، رابطهٔ $n^۲+۱|۴n-۲$ برقرار است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** طبق ویژگی شمارهٔ (۱۲) داریم:

$$n^۲+۱|۴n-۲\Rightarrow n^۲+۱\leq ۴n-۲\Rightarrow \underbrace{n^۲-۴n+۳}_{(n-۱)(n-۳)}\leq ۰\Rightarrow ۱\leq n\leq ۳$$

چون عبارت‌ها برای nهای طبیعی، مثبت‌اند از قدرمطلق استفاده نمی‌کنیم.

با جایگذاری ۱، ۲ و ۳ در رابطهٔ اصلی مقادیر $n=۱$ و $n=۳$ قابل قبول می‌باشند و جواب گزینهٔ (۳) است.

## اعداد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم: $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\dots\}$

**تذکر** عددی که اول نباشد را مرکب می‌گوییم.

**تذکر** عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

**نکته** اگر p عددی اول باشد و $a|p$ آن‌گاه $|a|=۱$ یا $|a|=p$

**تست** **اگر عدد طبیعی a دو عدد $۵k+۴$ و $۷k+۳$ را عاد کند، آن‌گاه a کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۳

**پاسخ:** عدد طبیعی a هر دو عدد $۵k+۴$ و $۷k+۳$ را می‌شمارد. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a|۷k+۳\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}}a|۳۵k+۱۵\\ a|۵k+۴\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۷}}a|۳۵k+۲۸\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}}a|۱۳$$

چون ۱۳ عددی اول است و a عددی طبیعی پس $a=۱$ یا $a=۱۳$ و در نتیجه جواب گزینهٔ (۴) است.

**نکته** اگر تجزیهٔ عدد طبیعی n به عوامل اول به‌صورت $n=P_۱^{\alpha_۱}P_۲^{\alpha_۲}\cdots P_k^{\alpha_k}$ باشد، آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با: $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$

**نتیجه** تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح n برابر است با: $۲(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$

**تست** **تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۷۰۰ کدام است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۲۷ ۳) ۵۴ ۴) ۶۳

**پاسخ:** تجزیهٔ ۲۷۰۰ برابر $۵^۲\times۳^۳\times۲^۲$ می‌باشد، پس:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۷۰۰}=(۲+۱)(۳+۱)(۲+۱)=۳۶$$

و جواب گزینهٔ (۱) است.

## بخش‌پذیری و اتحادها

در بخش‌پذیری عبارات جبری، اتحادها نقش زیادی دارند. دو تا از آن‌ها را که کاربردهای بیش‌تری دارند، یادآوری می‌کنیم:

**آ) اتحاد مزدوج**

$$(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲\Rightarrow\begin{cases}a-b|a^۲-b^۲\\ a+b|a^۲-b^۲\end{cases}$$

**ب) اتحاد چاق و لاغر**

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳\Rightarrow a-b|a^۳-b^۳$$

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳\Rightarrow a+b|a^۳+b^۳$$

**تست** **کدام نتیجه‌گیری لزوماً برقرار نیست؟**

۱) $c|a-b\Rightarrow c^۲|(a^۲-b^۲)^۲$
۲) $c|a+b\Rightarrow c|a^۳+b^۳$
۳) $c|a+b\Rightarrow c|a^۲-b^۲$
۴) $c|a+b\Rightarrow c|a^۳-b^۳$

**پاسخ:** درستی هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $\left.\begin{array}{l}c|a-b\\ a-b|a^۲-b^۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تعدی}}c|a^۲-b^۲\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}c^۲|(a^۲-b^۲)^۲$ ✓

گزینهٔ (۲): $\left.\begin{array}{l} c \mid a+b \\ a+b \mid a^۳+b^۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c \mid a^۳+b^۳ \checkmark$

گزینهٔ (۳): $\left.\begin{array}{l} c \mid a+b \\ a+b \mid a^۲-b^۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c \mid a^۲-b^۲$

برای رد گزینهٔ (۴) فرض کنیم $c=۴$ ، $b=۳$ و $a=۵$ باشد:

$$۴ \mid \underbrace{۵+۳}_{۸} \xrightarrow{\text{اما}} ۴ \nmid \underbrace{۵^۳-۳^۳}_{۹۸}$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

در کتاب حسابان تعمیم‌های اتحاد چاق و لاغر آمده است:

آ) برای هر عدد طبیعی $n$ داریم:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+b^{n-۱})$$

پس می‌توان گفت: $\forall n\in\mathbb{N}, a-b \mid a^n-b^n$

**نتیجه** اگر $\frac{n}{m}$ عددی طبیعی باشد، آن‌گاه: $a^m-b^m \mid a^n-b^n$

**تست** عدد $۳^{۲۱}-۲^{۱۴}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۷ ۳) ۲۱ ۴) ۲۵

**پاسخ :** ابتدا توان‌های اعداد داده‌شده را یکسان می‌کنیم.

$$۳^{۲۱}-۲^{۱۴}=(۳^۳)^۷-(۲^۲)^۷=۲۷^۷-۴^۷ \Rightarrow \underbrace{۲۷-۴}_{۲۳} \mid ۲۷^۷-۴^۷$$

پس $۲۳ \mid ۳^{۲۱}-۲^{۱۴}$ و جواب گزینهٔ (۱) است.

ب) اگر $n$ عددی زوج باشد آن‌گاه:

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\dots-b^{n-۱})$$

پس می‌توان گفت: $n=۲k \;,\; a+b \mid a^n-b^n$

**نتیجه** اگر $\frac{n}{m}$ عددی زوج باشد آن‌گاه: $a^m+b^m \mid a^n-b^n$

**تست** عدد $۳^{۳۶}-۲^{۳۶}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۵ ۳) ۶۵ ۴) ۱۹

**پاسخ :** با توجه به نتایج تعمیم اتحادهای چاق و لاغر داریم:

$$\frac{۳۶}{۳}=۱۲ \xrightarrow{\text{۱۲ زوج است.}} \begin{cases} ۳^۳-۲^۳ \mid (۳^۳)^{۱۲}-(۲^۳)^{۱۲} \Rightarrow ۱۹ \mid ۳^{۳۶}-۲^{۳۶} \\ ۳^۳+۲^۳ \mid (۳^۳)^{۱۲}-(۲^۳)^{۱۲} \Rightarrow ۳۵ \mid ۳^{۳۶}-۲^{۳۶} \end{cases}$$

$$\frac{۳۶}{۴}=۹ \xrightarrow{\text{۹ فرد است.}} ۳^۴-۲^۴ \mid (۳^۴)^۹-(۲^۴)^۹ \Rightarrow ۶۵ \mid ۳^{۳۶}-۲^{۳۶}$$

پس جواب گزینهٔ (۱) است.

پ) اگر $n$ عددی فرد باشد آن‌گاه:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\dots+b^{n-۱})$$

پس می‌توان گفت: $n=۲k+۱ \,;\, a+b \mid a^n+b^n$

**نتیجه** اگر $\frac{n}{m}$ عددی فرد باشد، آن‌گاه: $a^m+b^m \mid a^n+b^n$

**تست** به ازای چند عدد $n$ کوچک‌تر از ۵۰، رابطهٔ $۱۲۶ \mid ۵^n+۱$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

**پاسخ :** با توجه به این‌که $۵^۳+۱=۱۲۶$ است برای آن‌که رابطهٔ $۵^۳+۱ \mid ۵^n+۱$ درست باشد، باید $\frac{n}{۳}$ عددی فرد باشد. پس می‌توان نوشت:

$$۵^۳+۱ \mid ۵^n+۱ \Rightarrow \frac{n}{۳}=\underbrace{۲k+۱}_{\text{فرد}} \Rightarrow n=۶k+۳ \Rightarrow ۱\le ۶k+۳\le ۵۰ \Rightarrow ۰\le k\le ۷$$

به ازای هر مقدار صحیح $k$، یک مقدار برای $n$ به‌دست می‌آید یعنی ۸ مقدار صحیح کوچک‌تر از ۵۰ داریم که $۱۲۶ \mid ۵^n+۱$. پس جواب گزینهٔ (۴) است.

**۲۴.** در اثبات نامساوی $x^2+y^2+z^2 \ge xy-xz+yz$ به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^2+(x+z)^2+(z-y)^2 \ge 0$
۲) $(x+y-z)^2 \ge 0$
۳) $(x+y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$
۴) $(x-y)^2+(x-z)^2+(y+z)^2 \ge 0$

## قسمت دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

### بخش‌پذیری در اعداد صحیح

**☆۲۵.** به ازای چند عدد طبیعی $n$ داریم $4 \mid 2n+2$؟

۱) ۴　۲) ۳　۳) ۲　۴) ۱

**★۲۶.** اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که $a^5+a^4-a^3-a^2$ را می‌شمارد، کدام است؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۱۲　۴) ۲۴

**☆۲۷.** اگر $x \mid y^2$ و $y^3 \mid z^2$، کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

۱) $x^2 \mid yz^2$　۲) $x \mid z^2$　۳) $x^3 \mid z^4$　۴) $x^4 \mid y^2z^3$

**☆۲۸.** اگر $5 \mid a+3b$، در این‌صورت عبارت $a^2+9b^2+31ab$ بر کدام گزینه بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۵　۲) ۲۰　۳) ۲۵　۴) ۳۰

**☆۲۹.** به ازای چند عدد طبیعی $n$ داریم $0 \mid 2n^3-3n^2-2n$؟

۱) ۳　۲) ۲　۳) ۱　۴) صفر

**۳۰.** به ازای کدام مقادیر $n$، رابطهٔ $0 \mid 2n^3-n-1$ برقرار است؟

۱) $\{1\}$　۲) $\{0,1\}$　۳) $\{1,\pm\frac{1}{2}\}$　۴) $\mathbb{Z}$

**☆۳۱.** به ازای چند عدد صحیح $n$ داریم $2n^2+n-2 \mid 1$؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

**☆۳۲.** اگر $a \mid a-b$، آن‌گاه داریم:

۱) $a \mid a-b$　۲) $b \mid a-b$　۳) $a \mid b$　۴) $a-b \mid b$

**★۳۳.** به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی $a$ رابطهٔ $17 \mid 4a-3$ برقرار است؟

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸

**☆۳۴.** تعداد اعداد صحیح و مثبت که هر دو عدد $3a^2+8a-2$ و $3a+2$ را بشمارد، کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۴　۴) ۸

**۳۵.** کدام گزینه درست است؟

۱) $a+b \mid (a+b)^2-2ab$
۲) $a+b \mid (a+b)^3-3a^2b-3ab^2$
۳) $a+b \mid (a-b)^3+3a^2b-3ab^2$
۴) $a+b \mid (a-b)^2+2ab$

**۳۶.** اگر $a$ و $b$ اعداد صحیح فرد باشند، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $8 \mid a^2+b^4$　۲) $6 \mid a^2+b^2+4$　۳) $4 \mid a^4-b^2$　۴) $8 \mid a^2b^2$

**☆۳۷.** اگر $a^3 \mid b^2$ حداکثر مقدار طبیعی $n$ که $a^{7n-3} \mid b^{4n+3}$ کدام است؟

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸

**☆۳۸.** کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

۱) $a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid b^2$
۲) $ab^2 \mid c \Rightarrow a \mid c \,،\, b \mid c$
۳) $a^2 \mid b \Rightarrow a^3 \mid b^5$
۴) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \,،\, a \mid c$

☆**۳۹.** برای چند عدد طبیعی $n$ رابطهٔ $2n+1 \mid 2n^2-3n+3$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

☆**۴۰.** چند نقطه با مختصات صحیح و طول طبیعی در معادلهٔ $3x^2-2xy+3y-8x+3=0$ صدق می‌کنند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

**۴۱.** اگر رابطهٔ $n^2 \mid \binom{n}{2}$ برقرار باشد، بیش‌ترین مقدار $2n^2-\binom{n}{2}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

## اعداد اول

☆**۴۲.** اگر $a>1$ و $a \mid 5k+1$ و $a \mid 4k+3$، در این‌صورت $a$ بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**۴۳.** اگر $p$ یک عدد اول و $p \mid 30!+p$ برای $p$ چند مقدار متمایز وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☆**۴۴.** عدد $A=18^x \times 12^{x+1}$ دارای ۷۲ مقسوم‌علیه مثبت است. $x$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

★**۴۵.** تفاضل تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد طبیعی $N=2^\alpha \times 3^\beta$ و $\frac{N}{36}$ مساوی ۱۴ است. کم‌ترین مقدار $N$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۸۸ ۴) ۴۳۲

## اتحادها و عاد کردن

☆**۴۶.** اگر $b \mid a-c$ و $b+c \mid a^3-c^3$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $b \mid c$ ۲) $a \mid c$ ۳) $c \mid b$ ۴) $c \mid a$

**۴۷.** اگر روابط $(x-2)^2 \mid a^2-b^2$ و $(x-3)(x-1) \mid a^3+b^3$ برقرار باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\pm 4$ ۲) $\pm 3$ ۳) $\pm 2$ ۴) $\pm 1$

☆**۴۸.** تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{n : 65 \mid 2^n+1\}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

☆**۴۹.** عدد $2^{35}-3^{21}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

☆**۵۰.** عدد $5^{69}+3^{92}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۹۸ ۲) ۲۰۶ ۳) ۸ ۴) ۴۴

**۵۱.** $7^{200}-1$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸

# قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) ـ کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م)

## ب‌م‌م

☆**۵۲.** بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۹۰۰، ۱۶۸۰ و ۱۲۶۰ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

☆**۵۳.** ب‌م‌م دو عبارت $9n+2$ و $11n-5$ کدام است؟ (مشابه سراسری خارج از کشور ۹۲)

۱) ۱ یا ۶۷ ۲) ۶۷ یا ۳ ۳) ۴۵ یا ۱ ۴) ۴۵ یا ۳

☆**۵۴.** به ازای چند عدد طبیعی $n$، هر دو عدد $7n+5$ و $11n+2$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ (سراسری خارج از کشور ۹۱)

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد