

درس
اول

یادآوری اعداد صحیح

ریاضی هشتم IQ

اعداد صحیح

اعداد صحیح شامل اعداد مثبت (اعداد طبیعی)، اعداد منفی و عدد صفر می‌باشند. $\dots, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, \dots$ اعداد صحیح

چند نکته جهت یادآوری:

(۱) عدد صفر، نه منفی است و نه مثبت.

(۲) هر عدد مثبت، از هر عدد منفی بزرگ‌تر است.

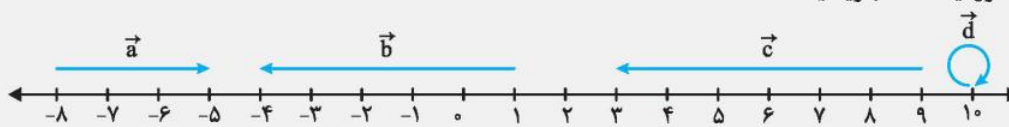
(۳) عدد صفر، از هر عدد منفی بزرگ‌تر و از هر عدد مثبت کوچک‌تر است.

(۴) در مورد دو عدد منفی، عددی که بدون در نظر گرفتن علامت، بزرگ‌تر است، کوچک‌تر می‌باشد.

مثال: $-12 < -7$

برای هر حرکت روی محور، می‌توان عددی صحیح متناظر با آن نوشت. اگر حرکت به سمت چپ باشد، علامت آن عدد منفی و اگر حرکت به سمت راست باشد، علامت آن عدد مثبت می‌باشد.

مثال: برای هر حرکت روی محور، یک عدد بنویسید.

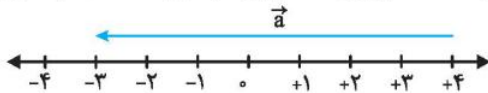


پاسخ:

$$\vec{a} = +3, \quad \vec{b} = -5, \quad \vec{c} = -6, \quad \vec{d} = 0$$

بردار

برای هر حرکت روی محور اعداد صحیح می‌توان از بردار استفاده کرد. بردار یک پاره‌خط جهت‌دار است که دارای ابتدا، طول و انتها می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل، بردار \vec{a} دارای ابتدای $+4$ ، انتهای -3 و طول -7 می‌باشد.



روابط زیر بین ابتدا، انتها و طول هر برداری وجود دارد.

طول بردار = ابتدا - انتهای بردار ، طول بردار = ابتدا + انتهای بردار ، ابتدا - بردار = طول بردار

مثال: بردار -4 را از چه نقطه‌ای رسم کنیم تا انتهای آن عدد $+9$ باشد؟

پاسخ: در این جا طول بردار -4 و انتهای بردار $+9$ می‌باشد و ابتدای بردار خواسته شده است. ابتدا بردار برابر است با:

$$\text{ابتدای بردار} = +9 - (-4) = 9 + 4 = +13$$

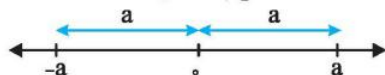
مثال: از نقطه A مساوی -2 ، بردار \overrightarrow{AB} برابر با -4 را رسم می‌کنیم. نقطه B را بیابید.

پاسخ:

$$B = \overrightarrow{AB} + A = -4 + (-2) = -6 \Rightarrow \text{ابتدای بردار} + \text{طول بردار} = \text{انتهای بردار}$$

قرینه اعداد صحیح

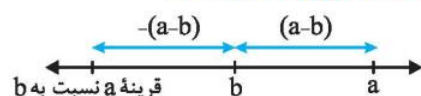
برای پیدا کردن قرینه یک عدد صحیح نسبت به مبدأ کافی است، علامت آن را عوض کنیم. علامت قرینه یک عدد، علامت منفی پشت آن عدد است.



به عنوان مثال قرینه -3 برابر $+3$ است و می‌نویسیم $-(-3) = +3$

می‌توان قرینه یک عدد را نسبت به نقطه‌ای غیر از صفر به دست آورد. مثلاً برای پیدا کردن قرینه نقطه a نسبت به نقطه b ، ابتدا

حاصل $a - b$ را به دست آورده، سپس حاصل را با b جمع می‌کنیم. به طور کلی قرینه نقطه a نسبت به نقطه b برابر است با $2b - a$



مثلاً قرینه نقطه 50 نسبت به 20 برابر با 90 است زیرا $2 \times 20 - 50 = 40 + 50 = 90$

نکته اگر تعداد علامت‌های منفی پشت عدد، فرد باشد، حاصل عددی منفی و اگر تعداد آن‌ها زوج بود، حاصل عددی مثبت خواهد بود. تعداد علامت‌های مثبت تأثیری در علامت عدد ندارد.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\text{آ) } -(-(-(+(-5)))) \quad \text{ب) قرینه } -(-(+(-4)))$$

پاسخ: آ) تعداد منفی‌های پشت عدد ۵، زوج است، پس حاصل برابر ۵ می‌شود.

ب) قرینه $-(-(+(-4)))$ برابر است با $-(-(+(-4)))$ که چون تعداد منفی‌های پشت عدد زوج است، حاصل برابر ۴ می‌شود.

جمع و تفریق اعداد صحیح

برای جمع و تفریق اعداد صحیح، ابتدا حاصل عبارت‌هایی را پیدا می‌کنیم که پشت آن‌ها چند علامت مثبت یا منفی وجود داشته باشد. با توجه به نکته قبل، مثلاً حاصل $-(-(-3))$ برابر ۳- و حاصل $-(-(+1))$ برابر ۱+ می‌شود. بعد از این‌که پشت اعداد فقط یک علامت قرار گرفت، جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم. اگر همه اعداد دارای یک علامت باشند، آن‌ها را بدون در نظر گرفتن علامت، جمع کرده و علامت آن‌ها را پشت جواب می‌گذاریم. اگر اعداد هم مثبت و هم منفی بودند، اعداد مثبت را با هم و اعداد منفی را با هم جمع کرده و حاصل آن‌ها را بدون در نظر گرفتن علامت از هم کم می‌کنیم. سپس علامت پشت عددی را که بدون در نظر گرفتن علامت، بزرگ‌تر است، پشت جواب می‌گذاریم.

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{آ) } (-12) + (-(-6)) - (-(-8)) \quad \text{ب) } (-12 - (-8)) + (-2 - 3) - (-(-6))$$

$$\text{پاسخ: آ) } (-12) + (-(-6)) - (-(-8)) = -12 + 6 - 8 = -14$$

$$\text{ب) } (-12 - (-8)) + (-2 - 3) - (-(-6)) = (-12 + 8) + (-5) - 6 = -4 - 5 - 6 = -15$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

ابتدا اگر پشت عددی چند علامت وجود داشت، آن‌ها را یکی می‌کنیم. سپس تعداد علامت منفی اعدادی را که در هم ضرب یا تقسیم شده‌اند، می‌شماریم. اگر تعداد آن‌ها فرد بود، حاصل عددی منفی و اگر تعداد آن‌ها زوج بود، حاصل عددی مثبت خواهد بود. سپس مانند ضرب و تقسیم اعداد طبیعی آن‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$\text{آ) } (-2) \times (-(-4)) \quad \text{ب) } (-8 - 11) \div (-(-1))$$

$$\text{پاسخ: آ) } (-2) \times (-(-4)) = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{ب) } (-8 - 11) \div (-(-1)) = -19 \div 1 = -19$$

به توان رساندن اعداد صحیح

عدد مثبت به هر توانی برسد، حاصل مثبت خواهد بود. مانند $(+2)^3 = +8$

اگر عدد منفی، به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی خواهد بود. مانند $(-3)^3 = -3^3 = -27$ ، زیرا $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

اگر عدد منفی داخل پرانتز باشد و به توان زوج برسد، حاصل مثبت خواهد بود. مانند $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد و توان عددی زوج باشد، حاصل منفی خواهد بود. زیرا در این حالت توان فقط مربوط به عدد است. مانند:

$$-3^2 = -(3^2) = -3 \times 3 = -9$$

تست: چند تا از عبارات زیر نادرست است؟

$$\text{آ) } -(-2)^3 = -8 \quad \text{ب) } (-2)^2 = -4 \quad \text{پ) } -2^4 = 16 \quad \text{ت) } (-2)^5 = 32$$

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

پاسخ: قسمت (آ) نادرست است، زیرا $(-2)^3 = -8$ می‌شود و $(-8) - (-8) = 0$ برابر ۸ خواهد شد. قسمت (ب) درست است، زیرا $(-2)^2 = 4$ شده

و $-4 = -4$ می‌شود. قسمت (پ) نادرست است، زیرا اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد و به توان زوج برسد، حاصل منفی می‌شود. بنابراین جواب

صحیح برابر ۱۶- است. قسمت (ت) درست است، زیرا $(-2)^5 = -32$ شده و $-32 = 32$ می‌شود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

اولویت انجام عملیات

۱) حاصل عبارت‌های داخل پرانتزها را از داخلی‌ترین پرانتز حساب می‌کنیم. (۲) حاصل اعداد توان‌دار را محاسبه می‌کنیم. (۳) در هنگام محاسبه (چه درون و چه خارج پرانتز) همواره ابتدا از سمت چپ به راست، ضرب‌ها و تقسیم‌ها را انجام می‌دهیم. (۴) پس از ضرب و تقسیم، جمع و تفریق‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & 3 \times 2^3 - 5 \times 4 \div (-2)^2 + [-36 \div 4 \times (-3)] \quad \text{ب)} \quad 4 - 2^2 \times [3 - 2 \times (5 - 7)] \\ \text{پاسخ: آ)} \quad & \frac{3 \times 8}{24} - \frac{5 \times 4}{20} + \frac{[-36 \div 4 \times (-3)]}{-9} = \frac{24}{19} - \frac{5}{5} + \frac{[-9 \times (-3)]}{27} = 19 + 27 = 46 \\ \text{ب)} \quad & 4 - 4 \times [3 - 2 \times (-2)] = 4 - 4 \times [3 + 4] = 4 - 4 \times 7 = 4 - 28 = -24 \end{aligned}$$

قانون کلاسی

اگر اعداد طبیعی به طور منظم از عدد یک، به فاصله یکی یکی افزایش یابند، $1, 2, 3, 4, \dots, n$ باشند، حاصل جمع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{(1 + \text{عدد آخر}) \times (\text{عدد آخر})}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{25}{50 \times 51} = 1275$$

به عنوان مثال حاصل $1 + 2 + 3 + \dots + 50$ برابر است با:

تست: حاصل $1 + 2 + \dots + 38$ چند برابر حاصل $1 + 2 + \dots + 76$ می‌باشد؟

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & \frac{39}{77} \quad \text{ب)} \quad \frac{39}{154} \quad \text{پ)} \quad \frac{1}{2} \quad \text{د)} \quad \frac{78}{177} \\ \text{پاسخ: ب)} \quad & \text{گزینه (ب) صحیح است.} \Rightarrow \frac{38 \times 39}{2} = \frac{76 \times 77}{2} \Rightarrow \frac{39}{2 \times 77} = \frac{39}{154} \end{aligned}$$

ویژه علاقمندان

دنباله منظم: اگر در یک الگو تعدادی عدد صحیح پشت سر هم قرار گرفته باشند و اختلاف دو عدد پشت سر هم الگو ثابت باشد، به این الگو، دنباله اعداد منظم یا دنباله حسابی می‌گویند. مانند:

$$5, 8, 11, 14, \dots \quad \text{یا} \quad 37, 32, 27, 22, \dots \quad \text{یا} \quad -61, -46, -31, -16, \dots$$

$$\text{روابط زیر بین اعداد دنباله منظم وجود دارد:} \quad \text{عدد اول} + \text{عدد آخر} = \frac{\text{میانگین اعداد دنباله منظم}}{2} + 1 \quad \text{فاصله بین اعداد} = \frac{\text{تعداد اعداد دنباله منظم} - 1}{2}$$

$$\text{میانگین اعداد دنباله منظم} = (\text{تعداد اعداد دنباله منظم}) \times \text{مجموع اعداد دنباله منظم}$$

دقت شود که برای محاسبه مجموع اعداد یک دنباله منظم، ابتدا از روابط فوق، تعداد اعداد و میانگین اعداد را محاسبه کرده، سپس در هم ضرب می‌کنیم تا مجموع اعداد به دست آید.

مثال: حاصل $2 + 7 + 12 + \dots + 97$ برابر چند است؟

پاسخ: دنباله منظم $2, 7, 12, \dots, 97$ را در نظر می‌گیریم. حاصل جمع خواسته شده، در واقع مجموع اعداد این دنباله منظم است. پس:

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد اعداد} &= \frac{97-2}{5} + 1 = 19 + 1 = 20 \\ \text{میانگین اعداد} &= \frac{97+2}{2} = \frac{99}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مجموع اعداد} = 20 \times \frac{99}{2} = 990$$

مثال: حاصل عبارت روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 299 - 300$$

پاسخ: اعداد را دو تا دو تا جدا کرده و حاصل آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{(1-2)}_{-1} + \underbrace{(3-4)}_{-1} + \underbrace{(5-6)}_{-1} + \dots + \underbrace{(299-300)}_{-1}$$

تعداد (-1) ها 150 تا است، پس حاصل عبارت $-150 = (-1) \times 150$ می‌شود.

تست: حاصل عبارت روبه‌رو در کدام گزینه آمده است؟

$$-61 - 57 - 53 - \dots - 5 - 1 + 3 + 7 + \dots + 59$$

$$-60 \quad (4)$$

$$-31 \quad (3)$$

$$30 \quad (2)$$

$$-62 \quad (1)$$

پاسخ: در این تست در واقع باید مجموع اعداد دنباله منظم $59, 53, 47, 41, 35, 29, 23, 17, 11, 5, -1, -7, -13, -19, -25, -31, -37, -43, -49, -55, -61$ را پیدا کنیم.

روش اول: یک راه این است که با کمک روابط سری منظم حاصل را به‌دست آوریم. اختلاف اعداد $+4$ می‌باشد.

$$\text{مجموع اعداد دنباله} = 31 \times (-1) = -31 \Rightarrow -1 = \frac{-2}{2} = \frac{59 + (-61)}{2} = \text{میانگین اعداد} = \frac{59 - (-61)}{4} + 1 = 31, \text{ تعداد اعداد}$$

روش دوم: اعداد را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$(-61 + 59) + (-57 + 55) + (-53 + 51) + \dots + (-5 + 3) - 1$$

تعداد -2 ها برابر تعداد اعداد دوم پرانتزها، یعنی $3, 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59$ می‌باشد.

$$\text{تعداد } -2 \text{ ها} = \frac{59 - 3}{4} + 1 = \frac{56}{4} + 1 = 15$$

بنابراین 15 تا -2 خواهیم داشت. بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$[15 \times (-2)] + (-1) = -31$$

بنابراین پاسخ صحیح، گزینه (3) خواهد بود.

کتابخانه IQ (1) اگر تعداد اعداد یک دنباله منظم، عددی فرد باشد، میانگین این اعداد برابر عدد وسطی خواهد بود.

مثال: $a, b, c, d, e \Rightarrow$ میانگین $= c$

(2) اگر تعداد اعداد یک دنباله منظم، عددی زوج باشد، میانگین این اعداد برابر میانگین دو عدد وسطی خواهد بود.

مثال: $a, b, c, d, e, f \Rightarrow$ میانگین $= \frac{c+d}{2}$

به حل مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال: مجموع 17 عدد صحیح زوج متوالی برابر 170 می‌باشد. عدد دوازدهم این دنباله چه عددی است؟

پاسخ: تعداد اعداد این دنباله 17 یعنی عددی فرد است. بنابراین عدد وسطی این دنباله یعنی عدد نهم برابر میانگین یعنی $\frac{170}{17} = 10$ می‌باشد.

چون اعضای دنباله، اعداد زوج متوالی هستند، پس اختلاف هر دو عدد پشت سر هم در دنباله، برابر 2 است. عدد دوازدهم نیز برابر است با:

$$(12 - 9) = 3 \Rightarrow 3 \times 2 = 6 \Rightarrow 6 + 10 = 16$$

تست: مجموع 20 عدد صحیح فرد متوالی برابر 400 می‌باشد. عدد هفتم این دنباله چند است؟

$$11 \quad (4)$$

$$13 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

پاسخ: تعداد اعداد این دنباله 20 یعنی عددی زوج است. میانگین اعداد برابر $\frac{400}{20} = 20$ می‌باشد که برابر است با میانگین دو عدد وسطی یعنی

عدد دهم و یازدهم. چون اعداد فرد هستند، عدد دهم 19 و عدد یازدهم 21 می‌باشند. بنابراین عدد هفتم برابر است با:

$$گزینه (3) صحیح است. \Rightarrow 13 = 19 - 6 \Rightarrow 6 = 3 \times 2 \Rightarrow 3 = 10 - 7$$

دنباله هندسی: اگر در یک دنباله اعداد، هر عدد از ضرب عدد قبلی در یک عدد ثابت به دست آمده باشد، به آن دنباله هندسی می‌گویند. مثلاً $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ یک دنباله هندسی می‌باشد. در دنباله هندسی به عدد ثابت، قدرنسبت یا q ، به اولین عدد دنباله t_1 و به عدد آخر آن t_n

می‌گویند. توجه شود که قدرنسبت یا q مخالف صفر می‌باشد، اگر تعداد اعداد یک دنباله هندسی n تا باشد، داریم:

$$t_n = t_1 \times q^{n-1}$$

مجموع اعداد دنباله هندسی $S = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}$$

مثال: حاصل عبارت روبه‌رو چقدر می‌شود؟

پاسخ: دنباله $1 = 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^{10}$ را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که می‌بینید، هر جمله از ضرب جمله قبلی در عدد ثابت ۳ به دست

می‌آید. پس حاصل جمع خواسته شده، در واقع مجموع جمله‌های یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۳ و جمله اول ۱ می‌باشد. جملات نیز از 3^0 تا 3^{10} یعنی ۱۱ تا می‌باشد.

$$t_1 = 1, q = 3, n = 11 \Rightarrow S = \frac{1 \times (1 - 3^{11})}{1 - 3} \Rightarrow S = \frac{3^{11} - 1}{2}$$

نکته: اگر جملات یک دنباله هندسی نامتناهی (بی‌پایان) باشند و قدرنسبت آن یعنی q عددی بین ۱ و -۱ و غیر صفر باشد، مجموع جملات از

$$S = \frac{t_1}{1-q}$$

رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

تست: مجموع اعداد روبه‌رو تقریباً چقدر می‌شود؟

$$\frac{1004}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$100 \quad (1)$$

پاسخ: دنباله $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ یک دنباله هندسی با تعداد جملات بی‌پایان، $q = \frac{1}{2}$ و $t_1 = 1$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

دانش‌آموزان گرامی، اکنون می‌توانید به تست‌های ۱ تا ۲۶ و ۶۵ تا ۹۴ (سری ۱) پاسخ دهید.

توجه

۱۶. به جای a چه عددی قرار دهیم تا تساوی برقرار باشد؟

(المپیاد ریاضی)

$$6 - 5(5 - 2(4 - 3(3 - 2(2 - a)))) = a$$

$$\frac{(-25) \times (-150)}{(+6) \times (-75)} = \frac{x}{(-2) - (-14)}$$

$$20 - 4(-7 + 24 \div 8 \times 3 - 2^2) = ?$$

$$5 - 4[3 - 2(1 - 2)^2 + 3]4 - 5 = ?$$

(آزمون ورودی)

$$+18 \quad \text{ف}$$

$$\frac{77}{125} \quad \text{ف}$$

(آزمون ورودی)

$$747 \quad \text{ف}$$

$$[-[-(-4 + 2 \times 3 - 1)] \times 3 - 2 \times [-(-6 \div (2 \times 3) + 1)] - 1] = ?$$

۲۵. می‌خواهیم در ردیف اعداد زیر، ۲ علامت جمع و ۳ علامت ضرب قرار دهیم به طوری که مقدار A ، حداقل ممکن شود. این حداقل چقدر است؟

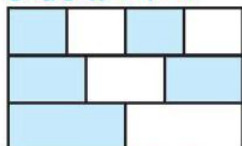
$$A = 2 \square 5 \square 7 \square 8 \square 9 \square 1$$

۲۶. ذره‌ای روی محور اعداد صحیح شروع به حرکت می‌کند. در دقیقه اول، یک واحد به سمت راست، در دقیقه دوم، دو واحد به سمت چپ، در دقیقه سوم، ۳ واحد به راست و ... حرکت می‌کند. این ذره پس از یک ساعت و نیم از شروع حرکت روی عدد ۱۰۰- قرار می‌گیرد. نقطه شروع حرکت این ذره کدام عدد بوده است؟

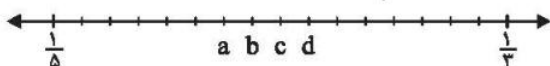
(مسابقات ریاضی)

$$-55 \quad \text{ف}$$

(مسابقات جهانی ریاضی)



(مسابقات جهانی ریاضی)



۲۸. کسرهای $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$ روی محور مشخص شده است. کدام یک از نقاط a, b, c, d یا d نمایشگر کسر $\frac{1}{4}$ است؟

تست‌های سری IQ

پادآوری اعداد صحیح

۶۵☆ می‌خواهیم در عبارت زیر، در جای خالی علامت + یا - قرار دهیم تا حاصل کم‌ترین عدد ممکن شود. چند بار از علامت منفی استفاده می‌کنیم؟

$$-5 \square (-6) \square (+2) \times (-3) \square (-8) + (-2)$$

هیچ بار ۱

۱ بار ۲

۲ بار ۳

۳ بار ۴

۶۶☆ با توجه به الگوی روبه‌رو، مجموع کل اعداد تا سطر سیصدم چند است؟

$$\begin{array}{cccc} -1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -1 & 1 & -1 & \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

۱

۲

۳

۴

۶۷☆ سه عدد صحیح داریم که مجموع اولی و دومی، -۳۱ و مجموع دومی و سومی، -۵۶ و مجموع اولی و سومی، -۵۱ است. میانگین سه عدد کدام است؟

-۱۹

-۲۳

-۲۵

-۲۷

۶۸☆ دمای هوای دو شهر A و B، قرینه یکدیگرند و دمای شهر C، ۶ درجه زیر صفر است. قرینه میانگین دمای این سه شهر کدام است؟

+۲

-۶

صفر

-۲

۶۹☆ میانگین پنج عدد صحیح، -۴ شده است. چه عددی به آن‌ها بیافزاییم تا میانگین این ۶ عدد، ۵ واحد بیش‌تر شود؟

+۶

-۲۰

+۲۶

-۲۶

۷۰☆ جدول (۱) را در نظر بگیرید، هر بار می‌توان یک مربع 2×2 از آن را انتخاب کرد و یک واحد از اعداد درون خانه‌های آن کم کرد. پس از چندین مرحله به جدول (۲) می‌رسیم. در این صورت مقدار x کدام است؟

(تیزهوشان)

۲	-۱	۳
۵	۰	-۲
-۴	۱	-۱

(۱)

۱	-۳	۲
۳	x	-۴
-۵	-۱	-۲

(۲)

۲

-۳

-۴

۵

۷۱☆ اگر قرینه عدد +۵ را با قرینه عدد +۴ نسبت به عدد +۹ جمع کنیم، چه عددی به دست می‌آید؟

-۱۴

+۱۴

-۹

+۹

۷۲☆ قرینه عدد +۵ را نسبت به قرینه قرینه -۱، p و قرینه p را نسبت به قرینه خودش، q می‌نامیم. فاصله p و q چند واحد است؟

(المپیاد ریاضی)

۱۲ واحد

۱۸ واحد

۲۸ واحد

۳۰ واحد

۷۳☆ قرینه عدد -۲ نسبت به کدام عدد زیر، +۱۰ است؟

صفر

۲

۴

۶

۷۴☆ به ازای چه تعداد عدد صحیح n، حاصل $\frac{n^2 + 1390}{n}$ عددی صحیح است؟ ($n \neq 0$)

(تیزهوشان)

۱۸

۸

۱۴

۱۶

۷۵☆ اگر مجموع قرینه اعداد ۱ تا n را با قرینه عدد m که یک عدد صحیح بین ۱ تا n است، جمع کنیم، حاصل آن برابر ۱۰۰۰- خواهد شد. در این صورت حاصل ضرب mn کدام است؟

۴۵۰

۴۴۰

۲۰۰

۱۴۴

۷۶☆ بیش‌ترین تعداد ارقامی که می‌توان از عدد ۱۰۰۰ رقمی $2008 \dots 2008$ پاک کرد، به طوری که حاصل جمع رقم‌های باقی‌مانده برابر 2008 شود، چند تا است؟

(کنگور)

۱۰۲۰

۷۴۶

۵۱۰

۲۶۰

۷۷☆ حاصل جمع دوازده عدد صحیح متوالی، ۶ شده است. کوچک‌ترین این اعداد، کدام است؟

-۵

+۵

-۶

۶

۲ / ۲۵

همه عددها مثبت هستند. علامت ضرب را بین اعدادی قرار می‌دهیم که از همه کوچکتر هستند.

$$A = \underbrace{2 \times 5}_{10} \times \underbrace{7 \times 8 \times 9}_{9} \times 1$$

بین این اعداد ۷ و ۸ کوچکترین هستند، علامت ضرب را بین آن‌ها می‌گذاریم.

$$\Rightarrow A = 2 \times 5 + 7 \times 8 + 9 \times 1 = 10 + 56 + 9 = 75$$

۴ / ۲۶

این سؤال را به کمک بردارها حل می‌کنیم. یک ساعت و نیم معادل ۹۰ دقیقه است.

$$\text{مجموع حرکت‌ها} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 19 - 90 = 45 \times (-1) = -45$$

$$\text{بردار} = -100 - (-45) = -100 + 45 = -55$$

۴ / ۲۷

هر سطر $\frac{1}{3}$ کل شکل است. کسر قسمت رنگی هر سطر را می‌نویسیم:

$$\text{سطر اول: } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \text{ سطر دوم: } \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\text{سطر سوم: } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \text{کل} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} + \frac{2}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

۱ / ۲۸

بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم شده است.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} \Rightarrow \text{اندازه هر قسمت} = \frac{2}{15} \div 16 = \frac{2}{15} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{20} \div \frac{1}{120} = \frac{1}{20} \times \frac{120}{1} = 6$$

ششمین قسمت بعد از $\frac{1}{5}$ عدد ۸ می‌باشد. \Rightarrow

۳ / ۲۹

با حدس و آزمایش مقدار $x=10$ و $y=1$ (و یا $x=1$ و $y=10$) می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{1} + \frac{1}{10} = 10 + 0.1 = 10.1$$

۳ / ۳۰

ابتدا $\frac{25}{45}$ را ساده می‌کنیم که برابر $\frac{5}{9}$ می‌شود. کسرهای مساوی $\frac{5}{9}$ را

$$\frac{5}{9}, \frac{10}{18}, \frac{15}{27}, \frac{20}{36}$$

با شرایط گفته شده می‌نویسیم:

که تعداد آن‌ها ۴ تا می‌شود.

۲ / ۱۷

$$\frac{(-25) \times (-150)}{6 \times (-75)} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{(-25) \times (-150) \times 12}{6 \times (-75)} = -100$$

۱ / ۱۸

$$20 - 4[-7 + \underbrace{24 \div 8 \times 3 - 2^2}_{-4}] = 20 - 4(-7 + 9 - 4) = 20 - 4 \times (-2) = 20 + 8 = 28$$

۲ / ۱۹

$$5 - 4[3 - 2(1-2)^2 + 3]4 - 5 = 5 - 4[3 - 2 \times 1 + 3]4 - 5 = 5 - 4[3 - 2 \times 1 + 3]4 - 5 = 5 - 4(4)4 - 5 = 5 - 64 - 5 = -64$$

۱ / ۲۰

$$A = \{ -[-(-6 + \frac{2 \times 3}{6} - 2)] \times 2 - 3 \times [-(\frac{-6 + 2 \times 3 + 2}{-3})] - 2 \}$$

$$= \{ -[-(-6 + 1 - 2)] \times 2 - 3 \times [-(\frac{-6 + 6 + 2}{-3})] - 2 \}$$

$$= \{ -[-(-6 + 6 - 2)] \times 2 - 3 \times [-(\frac{-2}{-3})] - 2 \}$$

$$= \frac{-2 \times 2}{-4} - \frac{3 \times 7}{-21} - 2 = -1 + 1 - 2 = -2$$

۲ / ۲۱

$$\frac{-7 - 4[(-3) + \frac{-18}{3} + 3(-6)] + 3[-6 + 13 + 9]}{-[7 + 3(-2 - (-6) - 15)] + 3(-8 - 9)}$$

$$= \frac{-7 - 4[-3 - 6 + -18] + 3[-6 + 13 + 9]}{-[7 + 3(-2 - (-6) - 15)] + 3(-8 - 9)}$$

$$= \frac{-7 - 4[-3 - 18] + 3 \times 16}{-[7 + 3(-11)] + 3 \times (-17)} = \frac{-7 + 84 + 48}{-[-33 - 51]} = \frac{125}{-(-77)} = \frac{125}{77}$$

۴ / ۲۲

$$3 \star 2 = 3^2 - 2 \times 2 = 9 - 4 = 5$$

$$5 \star (-1) = 5^2 - 2 \times (-1) = 25 + 2 = 27$$

$$(-1) \star (5) = (-1)^2 - 2 \times 5 = 1 - 10 = -9$$

$$\Rightarrow 27 \star (-9) = 27^2 - 2(-9) = 729 + 18 = 747$$

۲ / ۲۳

$$\text{حاصل} = -1 + 1 - 1 + 1000 - 1 = -1$$

۱ تا ۴۹ و ۱ تا ۴۹ داریم، که حاصل برابر صفر می‌شود.

اگر آخرین جمله یعنی $(-1)^{99}$ را کنار بگذاریم، در این صورت ۴۹ تا ۱ و ۴۹ تا ۱ داریم که حاصل برابر صفر می‌شود. پس جواب نهایی ۱- می‌شود.

۱ / ۲۴

$$[-[-(-4 + \frac{6}{1} \times 3 - 1)] \times 3 - 2 \times [-(\frac{-6 \div (2 \times 3) + 1}{-1})] - 1]$$

$$= [-[-(-4 + 18 - 1)] \times 3 - 2 \times [0] - 1] = [-(13) \times 3 - 0 - 1] = -39 - 1 = -40$$

۳ ۷۵

$$n \text{ تا } 1 \text{ مجموع قرینه اعداد} = -1 - 2 - 3 - \dots - n = \frac{-n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-n(n+1)}{2} + (-m) = -1000$$

$$\xrightarrow{\times 2 \text{ طرفین}} -n(n+1) - 2m = -2000 \Rightarrow n(n+1) + 2m = 2000$$

$$\xrightarrow{\text{با حدس و آزمایش}} n = 44, m = 10 \Rightarrow n \times m = 44 \times 10 = 440$$

۳ ۷۶

اگر بخواهیم بیشترین تعداد ارقام را خط بزنیم باید رقم‌های بزرگ‌تر را نگه داریم. در این سری از این اعداد $\frac{1000}{4} = 250$ رقم ۸ وجود دارد. اگر این ۲۵۰ رقم ۸ خط نخورد، حاصل جمع آن‌ها برابر ۲۰۰۰ می‌شود. حال کافی است که ۲ تا ۴ نیز خط نخورد. پس در کل، ۲۵۴ رقم که شامل ۸ تا ۱ و ۴ تا ۲ است، نباید خط بخورد. پس $746 = 254 - 1000$ رقم را می‌توان خط زد.

۴ ۷۷

$$\text{میانگین عدد ششم و هفتم} = \frac{6}{12} = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد ششم} = 0 \\ \text{عدد هفتم} = 1 \end{cases}$$



۱ ۷۸

$$\text{برابر عدد وسطی یعنی عدد هفتم است.} \Rightarrow \frac{-52}{13} = -4$$

$$\Rightarrow \text{عدد هشتم} = -4 + 2 = -2$$

۳ ۷۹

$$\text{برابر میانگین دو عدد دهم و یازدهم است.} \Rightarrow \frac{-80}{20} = -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد دهم} = -5 \\ \text{عدد یازدهم} = -3 \end{cases}$$

۱ ۸۰

$$A = \underbrace{1}_{-1} - \underbrace{2}_{-1} + \underbrace{3}_{-1} - \underbrace{4}_{-1} + \underbrace{5}_{-1} - \underbrace{6}_{-1} + \dots + \underbrace{999}_{-1} - \underbrace{1000}_{-1} = 500 \times (-1) = -500$$

۲ ۸۱

$$\underbrace{1}_{-7} - \underbrace{8}_{-7} + \underbrace{3}_{-7} - \underbrace{10}_{-7} + \underbrace{5}_{-7} - \underbrace{12}_{-7} + \dots + \underbrace{401}_{-7} - \underbrace{408}_{-7} = 201 \times (-7) = -1407$$

$$\text{تعداد } (-7) \text{ ها} = \frac{401-1}{2} + 1 = 201$$

۲ ۸۲

$$\underbrace{1}_{-1} + \underbrace{2}_{+1} - \underbrace{3}_{-1} + \underbrace{4}_{+1} - \underbrace{5}_{-1} + \underbrace{6}_{+1} - \underbrace{7}_{-1} + \underbrace{8}_{+1} - \underbrace{9}_{-1} + \dots + \underbrace{2010}_{-1} - \underbrace{2011}_{+1} + \underbrace{2012}_{-1} + \underbrace{2013}_{+1}$$

به تعداد ۱۰۰۶ عدد +۱ و ۱۰۰۶ عدد -۱ وجود دارد که حاصل آن‌ها صفر می‌شود. پس حاصل کل عبارت برابر +۱ می‌شود.

۳ ۶۷

$$\text{اولی} + \text{دومی} = -31$$

$$\text{دومی} + \text{سومی} = -56$$

$$+ \text{اولی} + \text{سومی} = -51$$

$$\frac{2(\text{اولی} + \text{دومی} + \text{سومی}) = -138}{2}$$

$$\Rightarrow \text{اولی} + \text{دومی} + \text{سومی} = \frac{-138}{2} = -69$$

$$\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{-69}{3} = -23$$

۴ ۶۸

$$A = -B \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A + B + C = -6$$

$$\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{-6}{3} = -2 \xrightarrow{\text{قرینه}} +2$$

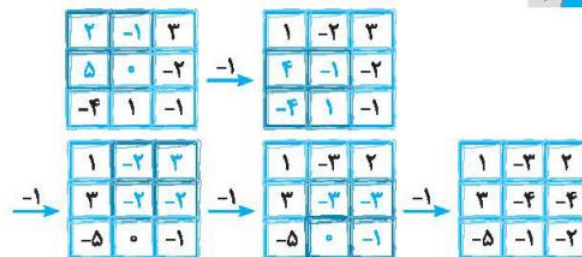
۲ ۶۹

$$\text{عدد ۵ مجموع} = 5 \times (-4) = -20$$

$$\left. \begin{aligned} 6 \times 1 = 6 & \Rightarrow \text{مجموع ۶ عدد} = 1 \Rightarrow \text{میانگین ۶ عدد} = -4 + 5 + 1 = 2 \\ \text{میانگین جدید} & = -4 + 5 + 1 = 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 6 - (-20) = 26$$

۴ ۷۰



$$\Rightarrow x = -4$$

۱ ۷۱

$$\left. \begin{aligned} -5 & \text{ قرینه } 5 \\ 14 & = (-5) + 14 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \times 9 - 4 = 14$$

۳ ۷۲

$$\left. \begin{aligned} p & = (-1) + 5 = 4 \\ q & = (-7) + 7 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \times (-1) - 5 = -7$$

$$\Rightarrow q - p = 0 - (-7) = 7$$

۲ ۷۳

$$x \text{ نسبت به } (-2) \text{ قرینه} = 2x - (-2) = 10 \Rightarrow 2x + 2 = 10$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

۳ ۷۴

$$\frac{n^2 + 1390}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{1390}{n}$$

$\frac{1390}{n}$ باید عددی صحیح باشد. پس عدد n مقسوم‌علیه‌های 1390 می‌باشد.

$$1390 \text{ های مقسوم‌علیه‌های } = \{1, 2, 5, 10, 139, 278, 695, 1390\}$$

$$\Rightarrow n \text{ تعداد} = 8$$

۳ / ۸۹

این عبارت مجموع اعداد یک دنباله هندسی نامتناهی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ می‌باشد. بنابراین مقدار تقریبی آن برابر است با:

$$t_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

۱ / ۹۰

این عبارت مجموع اعداد یک دنباله هندسی نامتناهی با قدرنسبت $\frac{1}{5}$ می‌باشد. بنابراین مقدار تقریبی آن برابر است با:

$$t_1 = 1, q = \frac{1}{5} \Rightarrow S = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

۴ / ۹۱

چون فاصله کسرها با هم برابر است می‌توان نوشت:

$$a - \frac{5}{12} = b - a \Rightarrow b = 2a - \frac{5}{12} \quad (*)$$

از طرفی داریم $a + b = \frac{4}{3}$ که با جایگذاری (*) در آن داریم:

$$a + (2a - \frac{5}{12}) = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a = \frac{4}{3} + \frac{5}{12} = \frac{16}{12} + \frac{5}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{7}{4}}{3} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12} \Rightarrow c = \frac{11}{12}$$

$$\begin{array}{cccc} & + & + & + \\ & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{array}$$

۱ / ۹۲

$$\text{گزینه (۲)} = \frac{66}{77} = \frac{6}{7}, \text{گزینه (۳)} = \frac{4444}{5555} = \frac{4}{5}$$

$$\text{گزینه (۴)} = \frac{555}{666} = \frac{5}{6}$$

طبق نکته گفته‌شده در درسنامه داریم $\frac{7}{8} > \frac{6}{7} > \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$

۴ / ۹۳

طبق نکته گفته‌شده در کسرهای کوچک‌تر از واحد که فاصله بین صورت و مخرج آن‌ها یکسان باشد، کسری بزرگ‌تر است که ظاهر اعداد آن بزرگ‌تر

$$\text{باشد} \quad \frac{10001}{10002} > \frac{1001}{1002} > \frac{101}{102}$$

۱ / ۹۴

از روش رد گزینه کمک می‌گیریم.

مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت است، پس مقدار کسر کوچک‌تر از واحد است. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) که اعداد بزرگ‌تر از واحد می‌باشند، حذف می‌شوند. هم‌چنین اگر عدد صورت را ۲ برابر کنیم از عدد مخرج بیش‌تر

می‌شود. پس کسر داده‌شده از $\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر است، بنابراین گزینه (۲) یعنی

$$\frac{24}{49} \text{ چون از } \frac{1}{3} \text{ کم‌تر است، حذف می‌شود.}$$

۱ / ۸۳

$$\text{عبارت} = \underbrace{(11-12)}_{-1} + \underbrace{(13-14)}_{-1} + \underbrace{(15-16)}_{-1} + \dots + \underbrace{(101-102)}_{-1}$$

$$\text{ها تعداد } (-1) = \frac{101-11}{2} + 1 = 46$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = 46 \times (-1) = -46$$

۲ / ۸۴

$$A + 2B = A + B + B = [(1+2+3+\dots+100) + (-1-2-3-\dots-100)] + B$$

$$= B = -1-2-3-\dots-100 = -\frac{100 \times 101}{2} = -5050$$

۳ / ۸۵

اعداد ۳ رقمی که بر ۶ بخش‌پذیرند، دنباله زیر را تشکیل می‌دهند:

$$102, 108, \dots, 996 \Rightarrow \text{تعداد} = \frac{996-102}{6} + 1 = 149 + 1 = 150$$

۲ / ۸۶

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد} = \frac{109-1}{2} + 1 = 55 \\ \text{میانگین} = \frac{109+1}{2} = 55 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 55 \times 55 = 3025$$

$$\begin{array}{r} 3025 \overline{) 4} \\ \underline{-28} \quad 756 \\ \underline{22} \quad 756 \\ \underline{-20} \quad 25 \\ \underline{-24} \end{array}$$

\Rightarrow باقی‌مانده ۱

۲ / ۸۷

این عبارت مجموع جمله‌های یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ می‌باشد.

$$A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{12}$$

$$t_1 = 2, q = 2, n = 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{2(1-2^{12})}{1-2} = -2(1-2^{12})$$

$$= 2^{12} - 2$$

۱ / ۸۸

این عبارت، مجموع اعداد دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{10}}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, n = 10 \Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^{10}})}{\frac{2}{3}} = \frac{3^{10}-1}{2 \times 3^{10}}$$

۱. مقدار $A = \{-[-(-4+2 \times 3-1)] \times 3 - 2 \times [-(6 \div 2 \times 3+1)] - 1\}$ کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) -۱۲ ۳) -۱۴ ۴) -۲۰
۲. حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟
 $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{1393} = ?$
 ۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱۳۹۳ ۴) -۱۳۹۳
۳. مجموع ۵ عدد صحیح متوالی، سه برابر کوچک‌ترین آن‌هاست. بزرگ‌ترین عدد کدام است؟
 ۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۵
۴. اگر x و y دو عدد صحیح مثبت و $x < y$ و $xy = 13$ باشد، در این صورت $x^2 - y$ کدام است؟
 ۱) ۱۲ ۲) -۱۱ ۳) ۱۳ ۴) -۱۲
۵. حاصل عبارت $(1-2) - (3-4) - (5-6) - \dots - (99-100)$ کدام است؟
 ۱) ۴۸ ۲) -۴۸ ۳) ۴۹ ۴) -۵۰
۶. مقدار عبارت $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-\dots+61$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۶۰ ۳) -۶۰ ۴) -۵۹
۷. اگر $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$ کدام است؟
 ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۲
۸. حاصل $(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5}) \dots (1-\frac{1}{1395})$ کدام است؟
 ۱) $\frac{1}{1394}$ ۲) $\frac{3}{1394}$ ۳) $\frac{1}{1395}$ ۴) $\frac{2}{1395}$
۹. مقدار عبارت $7 \times 3 \frac{1}{5} - 4 \times \frac{16}{5} + 2 \times 3 \frac{1}{2} + 5 \times \frac{32}{10}$ برابر کدام گزینه است؟
 ۱) ۱۵ ۲) $\frac{55}{16}$ ۳) $\frac{69}{10}$ ۴) ۳۲
۱۰. اگر $\frac{a}{b} = -2$ ، $\frac{a}{c} = -3$ و $\frac{f}{c} = -12$ باشند، حاصل $\frac{b}{f}$ کدام است؟
 ۱) ۸ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) ۷۲ ۴) $\frac{1}{72}$
۱۱. کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟
 ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$
۱۲. کدام کسر بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است؟
 ۱) $\frac{17}{24}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{7}{12}$
۱۳. اگر $a+b = 9+4$ و $b+c = 5+3$ باشد، آن‌گاه $(a-b) \div (b-c)$ برابر کدام گزینه است؟
 ۱) $4 \div 1$ ۲) $25 \div 8$ ۳) $7 \div 12$ ۴) $5 \div 2$
۱۴. حاصل عبارت $\frac{1}{11 \times 16} + \frac{1}{16 \times 21} + \frac{1}{21 \times 26} + \dots + \frac{1}{46 \times 51}$ برابر کدام گزینه است؟
 ۱) $\frac{8}{285}$ ۲) $\frac{62}{561}$ ۳) $\frac{40}{561}$ ۴) $\frac{8}{561}$
- (آزمون کانگورو)
- (آزمون کانگورو)
- (آزمون کانگورو)
- (آزمون کانگورو)

۱۵. حاصل عبارت $\frac{202}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{10302}}$ برابر کدام گزینه است؟

- ۲۰۱ (۱) ۲۰۲ (۲) ۲۰۳ (۳) ۲۰۴ (۴)

۱۶. اگر $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{5}{9}$ باشد و x, y, z اعداد طبیعی باشند، حاصل $x + y^2 + z^3$ کدام است؟

- ۶۳ (۱) ۶۶ (۲) ۶۷ (۳) ۷۶ (۴)

۱۷. حاصل کسر $\frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 99}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 99}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲۴۹ (۲) ۳+۴۸ (۳) ۳۵۲ (۴)

۱۸. وزن یک کامیون بدون بار ۲۰۰۰ کیلوگرم است. بعد از بار زدن، وزن بار ۸۰٪ وزن کامیون پر از بار است. در اولین توقف $\frac{1}{4}$ بار کامیون خالی می‌شود. حالا وزن بار چند درصد وزن کل کامیون با بار است؟

(آزمون کانگورو)

- ۲۰٪ (۱) ۲۵٪ (۲) ۵۵٪ (۳) ۷۵٪ (۴)

۱۹. نسبت دو عدد $\frac{2}{3}$ است. اگر ۴ واحد به هر کدام اضافه کنیم، نسبت آن‌ها $\frac{5}{7}$ می‌شود. حاصل جمع ۲ عدد اولیه کدام است؟

- ۲۰ (۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) ۳۵ (۴)

۲۰. حاصل عبارت $2(1 - \frac{1}{4}) + 3(1 - \frac{1}{9}) + 4(1 - \frac{1}{16}) + \dots + n(1 - \frac{1}{n^2})$ برابر کدام گزینه است؟

- $n^2 + 1$ (۱) $\frac{1}{4}n(n+1)$ (۲) $\frac{1}{4}n(n-1)$ (۳) $\frac{1}{4}(n^2 + 2n)$ (۴)

۱ ۵
حاصل $(-1) - (-1) - (-1) - \dots - (-1) = -1 + 1 + 1 + \dots + 1 = ?$

تعداد ۱ها به تعداد جملات دنباله منظم ۹۹، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹ تا می‌باشد. پس حاصل برابر است با:

یعنی $49 = \frac{99-3}{2} + 1$

حاصل $-1 + 49 \times 1 = -1 + 49 = 48$

۱ ۶
 $1 + \frac{2}{-1} - \frac{3}{+1} - \frac{4}{-1} + \frac{5}{+1} + \frac{6}{-1} - \frac{7}{+1} - \frac{8}{-1} + \frac{9}{+1} + 10 - \dots - 57 + \frac{58}{-1} - \frac{59}{+1} + \frac{60}{-1} + \frac{61}{+1}$

دقت شود که آخرین عدد منفی هر دسته در سری منظم ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹ یکی مانده به آخرین عدد منفی است. تعداد ۱ها و ۱ها برابر است. پس حاصل آن‌ها صفر می‌شود. در ابتدا نیز یک داشتیم، پس حاصل کل نیز برابر یک می‌شود.

۲ ۷

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

۳ ۱
 $A = \{ - [- (- 4 + 2 \times 3 - 1)] \times 3 - 2 \times [- (- 6 \div 2 \times 3 + 1)] - 1 \}$

$$A = \{ - [- (- 4 + 6 - 1)] \times 3 - 2 \times [- (- 3 + 3 + 1)] - 1 \}$$

$$A = \{ - [- (- 1)] \times 3 - 2 \times [- (- 8)] - 1 \} = 3 - 16 - 1 = -14$$

$$A = \{ 3 - 16 - 1 = -14 \}$$

۲ ۲

عدد منفی داخل پرانتز به توان زوج برسد حاصل مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل منفی است.

$$\text{حاصل} = -1 + (-1) + (-1) + \dots + (-1) - 1 = -1$$

۳ ۳

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 3x$$

$$5x + 10 = 3x \Rightarrow 5x - 3x = -10 \Rightarrow 2x = -10$$

$$\Rightarrow x = -5 \Rightarrow x + 4 = -5 + 4 = -1$$

۴ ۴

$$xy = 13 = 1 \times 13 \xrightarrow{x < y} x = 1, y = 13$$

$$x^2 - y = 1^2 - 13 = 1 - 13 = -12$$

۴ / ۱۵

$$\begin{aligned} \text{محاسبه منفرجه} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{101 \times 102} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{1}{1} - \frac{1}{102} = \frac{101}{102} \\ \text{محاسبه کل} &= \frac{202}{101} = \frac{202 \times 102}{101} = 204 \end{aligned}$$

۲ / ۱۶

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} &= \frac{1}{9} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} \\ &\Rightarrow x = 1, y = 1, z = 4 \Rightarrow 1 + 1^2 + 4^2 = 1 + 1 + 16 = 18 \end{aligned}$$

۱ / ۱۷

$$\left(\frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 99}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 99} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 99}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 99} = 1 \right)$$

۴ / ۱۸

وزن = x

$$\begin{aligned} \text{بعد از بار زدن} \Rightarrow x &= \frac{4}{100} (x + 2000) \Rightarrow x = \frac{4}{5} x + 1600 \\ \Rightarrow x - \frac{4}{5} x &= 1600 \Rightarrow \frac{1}{5} x = 1600 \\ \Rightarrow x &= 1600 \times 5 = 8000 \text{ کیلوگرم وزن کل بار} \\ \frac{1}{4} \times 8000 &= 2000 \text{ کیلوگرم وزن بار خالی می شود.} \\ \Rightarrow 8000 - 2000 &= 6000 \text{ وزن بار باقی مانده} \\ \frac{6000}{6000 + 2000} &= \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{6000}{8000} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{25}{100} \times \frac{3}{1} = 75\% \end{aligned}$$

۳ / ۱۹

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3} y (*) \\ \frac{x+4}{y+4} &= \frac{5}{7} \Rightarrow 7x + 28 = 5y + 20 \\ \Rightarrow 7x - 20 &= 5y - 7x \Rightarrow 14 = 5y - 7x \\ \text{جایگذاری (*)} \Rightarrow 14 &= 5y - 7 \times \frac{2}{3} y = 5y - \frac{14}{3} y = \frac{15-14}{3} y = \frac{1}{3} y \\ \Rightarrow y &= 3 \times 14 = 42 \\ x &= \frac{2}{3} y = \frac{2}{3} \times 42 = 28 \Rightarrow 16 + 28 = 44 \end{aligned}$$

۳ / ۲۰

$$\begin{aligned} n \times \frac{1}{n} + n \times \frac{2}{n} + n \times \frac{3}{n} + \dots + n \left(\frac{n-1}{n} \right) \\ = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 \\ = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1) \end{aligned}$$

۴ / ۸

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{1395} = \frac{2}{1395}$$

۴ / ۹

$$\begin{aligned} 7 \times \left(\frac{3}{2} \right) - 4 \times \left(\frac{3}{2} \right) + 2 \times \left(\frac{3}{2} \right) + 5 \times \left(\frac{3}{2} \right) &= \frac{3}{2} \times (7 - 4 + 2 + 5) \\ &= \frac{3}{2} \times 10 = 15 \end{aligned}$$

۲ / ۱۰

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} = -3 \Rightarrow \frac{c}{a} &= -\frac{1}{3} \\ \frac{d}{b} \times \frac{e}{a} \times \frac{f}{c} &= (-2) \times \left(-\frac{1}{3} \right) \times \left(-\frac{4}{3} \right) \Rightarrow \frac{f}{b} = -8 \Rightarrow \frac{b}{f} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

۱ / ۱۱

$$\begin{aligned} \text{گزینه (۱)} &= \frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \text{ گزینه (۲)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ \text{گزینه (۳)} &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \text{ گزینه (۴)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{گزینه (۳)} &= \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \text{ گزینه (۴)} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \\ \leftarrow \text{گزینه (۱)} &\text{ از همه بزرگ تر است.} \end{aligned}$$

۴ / ۱۲

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 \times 6}{2 \times 6} &= \frac{6}{12} \\ \frac{2 \times 4}{3 \times 4} &= \frac{8}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$$

۲ / ۱۳

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{9}{4} \Rightarrow a &= \frac{9}{4} b \\ \frac{b}{c} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5c &= 3b \Rightarrow c = \frac{3}{5} b \\ \Rightarrow (a-b) \div (b-c) &= \left(\frac{9}{4} b - b \right) \div \left(b - \frac{3}{5} b \right) \\ &= \left(\frac{9}{4} - 1 \right) b \div \left(1 - \frac{3}{5} \right) b = \frac{5}{4} b \div \frac{2}{5} b = \frac{5}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

۴ / ۱۴

کسرهای این که تلسکوپی شوند، باید دارای صورت ۵ باشند. بنابراین جواب تلسکوپی آن را در کسر $\frac{1}{5}$ ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{26} + \dots + \frac{1}{46} - \frac{1}{51} \right) \\ = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{51} \right) = \frac{1}{5} \times \frac{40}{561} = \frac{8}{561} \end{aligned}$$